ÜBER MELLINTRANSFORMATIONEN GANZER FUNKTIONEN UND EINE KLASSE BESTMÖGLICHER TAUBERSÄTZE

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von
MANFRED STÖCKMANN
aus Aachen

Marburg/Lahn 1969

ÜBER MELLINTRANSFORMATIONEN GANZER FUNKTIONEN UND EINE KLASSE BESTMÖGLICHER TAUBERSÄTZE

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von
MANFRED STÖCKMANN

aus Aachen

Marburg/Lahn 1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Philipps-Universität Marburg/Lahn
als
Dissertation angenommen am 31. 10. 1969

Tag der mündlichen Prüfung: 5. 11. 1969

Berichterstatter: Professor Dr. Niemeyer

Mitberichterstatter: Professor Dr. Avakumovic'

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 3

I. KAPITEL

DIE MELLINTRANSFORMATION VON GANZEN FUNKTIONEN ENDLICHER ORDNUNG

§ 1 Die Mellintransformation 10

§ 2 Ordnung und Typ ganzer Funktionen 14

§ 3 Die Mellintransformation ganzer Funktionen 16

II. KAPITEL

EIN ALLGEMEINER TAUBERSATZ FÜR INTEGRALTRANSFORMATIONEN VON EXPONENTIELLEM ABFALL

§ 1 Die Klasse der betrachteten Kerne 36

§ 2 Tauberbedingungen 40

§ 3 Der allgemeine Taubersatz 42

§ 4 Anwendungen auf spezielle Kerne 69

Literaturverzeichnis 79

Symbolverzeichnis 82

EINLEITUNG

Im Jahre 1932 bewies N. Wiener [20] als erster einen allgemeinen Taubersatz, der auf die folgende, für unsere Zwecke angemessene Form gebracht werden kann [19] :

Taubersatz von Wiener

I) Es sei $k(x) \in L^1(o,\infty)$,

$$K(1+iv) := \int_o^\infty x^{iv}\, k(x)\, dx \neq 0 \qquad \text{in } -\infty < v < \infty .$$

II) Es sei $a(x)$ definiert und beschränkt auf dem Intervall (o,∞), und es gelte dort

$$\underline{\lim}_{h \downarrow 1\,,\; x \to \infty\,,\; x \le y \le h\cdot x} \left\{ a(y) - a(x) \right\} \geq o.$$

Dann folgt aus

$$\frac{1}{t} \int_o^\infty k\left(\frac{x}{t}\right) a(x)\, dx = A \int_o^\infty k(x)\, dx + o(1) \qquad \text{für } t \to \infty$$

$$a(x) = A + o(1) \qquad \text{für } x \to \infty .$$

Die Klasse der zugelässenen Kerne $k(x)$ ist zwar in diesem Satz sehr umfangreich, aber es fehlt eine genauere Charakterisierung des Restgliedes.

Allgemeine Taubersätze zur Präzisierung des Restgliedverhaltens wurden in den folgenden Jahren u. a. von Beurling 1938 [3] , Lyttkens 1954 [11] , 1956 [12] , Ganelius 1962 [7] und Frennemo 1965 [6] aufgestellt. Als Beispiel

sei das folgende Ergebnis von Ganelius aufgeführt:

Taubersatz von Ganelius [+])

I) Es sei $k(x) \in L^1(o,\infty)$, $K(w) := \int_o^\infty x^{w-1}\, k(x)\, dx$ die Mellintransformierte von $k(x)$.
Es existiere eine in $|Re(w-1)| < b$ holomorphe Funktion $G(w)$ mit $G(1+iv) = [K(1+iv)]^{-1}$, die dort einer Abschätzung der Gestalt

$$|G(w)| \leq M\, e^{m|w|}$$

genügt.

II) Die Funktion $a(x)$ sei definiert und beschränkt auf dem Intervall (o,∞). Es existiere eine Konstante C so, daß $a(x) + C \log x$ dort monoton wächst.

Dann folgt aus

$$\frac{1}{t} \int_o^\infty k(\tfrac{x}{t})\, a(x)\, dx = A \int_o^\infty k(x)\, dx + O(t^{-\alpha}) \qquad t \to \infty\,,\ \alpha > 0$$

$$a(x) = A + O(\frac{1}{\log x}) \qquad \text{für } x \to \infty\,.$$

[+]) Zur Verdeutlichung ist hier die Konstante A, die das Verhalten des Hauptgliedes charakterisiert, noch aufgenommen worden. Im folgenden wird o.B.d.A. A=0 gesetzt.

Aus dem Vergleich dieser beiden Sätze und aus den oben zitierten Arbeiten geht unmittelbar hervor, daß eine Verschärfung der Restgliedabschätzung erkauft wird durch

1) Einschränkung der Klasse der zulässigen Kerne, insbesondere durch Holomorphieforderungen an die Funktion $[K(w)]^{-1}$ links der kritischen Geraden $w=1+iv$;

2) Aufsuchen passender Tauberbedingungen. Die von uns später benutzten Tauberbedingungen sind i.a. weniger einschränkend als z.B. die von Ganelius;

3) genauere Untersuchung des Verhaltens der Integraltransformation.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, für eine allgemeine Klasse von Kernen und Tauberbedingungen aus dem exponentiellen Abfall der Integraltransformation $(m, \gamma > 0)$

$$(1) \qquad \int_0^\infty k\left(\frac{x}{t}\right)\, da(x) \;=\; R(t) \;=\; O(e^{-m\cdot t^{\gamma}}) \quad \text{für } t \to \infty$$

auf $a(x) = O(x^{-\beta})$ für $x \to \infty$ zu schließen.

Sätze von diesem Typ sind für spezielle Kerne, die mit der Stieltjestransformation zusammenhängen, wohlbekannt und zuerst von Avakumović 1950 [1] , Vučković 1954 [18] und Niemeyer 1965 [14] bewiesen und auf Probleme der Spektraltheorie elliptischer Differentialoperatoren angewandt worden [2] , [17] , [14] .

Der Grundgedanke der Beweise (o.B.d.A. sei $\gamma = 1$) ist, nach partieller Integration von (1) das Integral

$$(2) \qquad \frac{1}{t} \int_0^\infty k'\left(\frac{x}{t}\right) a(x)\, dx = -R(t)$$

mit einer ganzen Funktion $f(t)$ der Ordnung 1, für die

$$(3) \qquad \int_0^\infty k'\left(\frac{x}{t}\right) \frac{f(t)}{t}\, dt = e^{-x}$$

gilt, zu multiplizieren und bezüglich t von o bis ∞ zu integrieren. Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt sich

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-sx} a(x)\, dx = -\int_0^\infty f(st) R(t)\, dt$$

und aus dieser Beziehung mit Hilfe bekannter Taubersätze für Laplace - Integrale von Ingham [9] bzw. Karamata [10] sofort die Behauptung.

Um diesen Beweisgedanken auf eine allgemeine Klasse von Kernen übertragen zu können, müssen die folgenden Probleme gelöst werden:

1) Zu welchen Funktionen $k(x)$ existieren ganze Funktionen $f(x)$ von endlicher Ordnung so, daß (3) gilt. Um eine genaue Abgrenzung dieser Funktionenklasse zu erhalten, wäre es wünschenswert, notwendige und hinreichende Bedingungen hierfür anzugeben.

2) Unter welchen zusätzlichen Bedingungen läßt sich die oben erwähnte Vertauschung der Integrationsreihenfolge ausführen.

Da bereits im Fall einfacher Kerne, z.B. $k(x) = x(1+x)^{-2}$, für die $k(x)$ und die zugehörige Funktion $f(x)$ bekannt sind, die entstehenden Doppelintegrale nicht mehr absolut konvergieren, sind besonders an dieser Stelle beweistechnische Schwierigkeiten zu erwarten.

Das erste Problem wird in Kapitel I vollständig behandelt. Als Hilfsmittel bietet sich hierfür der Formalismus der Mellintransformation an, da (3) das Faltungsintegral dieser Transformation ist.

Wir erhalten also aus (3) für die Mellintransformationen $K(w)$ von $k(x)$, $F(w)$ von $f(x)$ und $\Gamma(w)$ von e^{-x} die Gleichung

$$F(w) = \frac{\Gamma(w)}{K(w)} \quad . \tag{5}$$

Damit reduziert sich unser erstes Problem auf die Aufgabe, eine ganze Funktion endlicher Ordnung durch ihre Mellintransformation umkehrbar eindeutig zu charakterisieren. Diese Aufgabe wird durch Satz 1 , Kapitel I § 3, gelöst. Dieser Satz ist zugleich ein Analogon des Satzes von Paley-Wiener [1.4] , der eine quadratintegrable ganze Funktion vom Exponentialtyp umkehrbar eindeutig durch ihre Fouriertransformierte kennzeichnet.

Das zweite Problem beansprucht den größten Teil des zweiten Kapitels, in dem der folgende allgemeine Taubersatz nach der oben skizzierten Methode bewiesen wird:

Voraussetzungen

I 1) Die Funktion $k(x)$ sei für $x \geq 0$ stetig und
$x^{\frac{\beta_2 - 1}{2}} k(x) \in L^2(0, \infty)$.

2) Die Mellintransformierte $K(w)$ von $k(x)$ sei in einem Streifen $-\beta_1 - \eta \leq \mathrm{Re}\, w \leq \beta_2 + \eta$ $(\beta_1 \geq 0;\ \beta_2, \eta > 0)$ meromorph mit genau zwei einfachen Polen an den Stellen $-\beta_1$ und β_2.
Es gelte dort gleichmäßig in $\mathrm{Re}\, w$ $K(w) = O(|\mathrm{Im} w|^{-\delta})$ mit $\delta > 4$ für $|\mathrm{Im} w| \to \infty$.

3) $[K(w)]^{-1}$ sei in der Halbebene $\mathrm{Re}\, w \leq \beta_2 + \eta$ holomorph, und es gelte dort gleichmäßig in $\arg w$

$$\frac{1}{K(w)} = O\left[e^{a\, \mathrm{Re}\, w + \frac{\pi}{2\gamma} |\mathrm{Im} w|} \cdot \begin{cases} |w|^{-\alpha} & \text{für } \beta_1 > 0 \\ |w|^{-\alpha+1} & \text{für } \beta_1 = 0 \end{cases} \right]$$

mit reellem a und positiven α, γ für $|w| \to \infty$.

II 1) Die Funktion $a(x)$ sei definiert und reell für $x \geq 0$ und von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall, $a(0)=0$.

2) Es gebe eine Funktion $H(\delta)$ und eine Zahl β mit $-\gamma < \beta \leq \gamma$ dergestalt, daß für alle $\delta > 0$ und $x \leq x' \leq x + \delta$, $x \geq x_0(\delta)$
$x'^{\frac{\beta}{\gamma}} a(x'^{\frac{1}{\gamma}}) - x^{\frac{\beta}{\gamma}} a(x^{\frac{1}{\gamma}}) \geq -H(\delta)$ ist.

3) Es sei $a(x) = O(x^{\gamma - \beta})$ für $x \to \infty$.

III Das Integral $R(t) := \int_0^\infty k(\frac{x}{t})\, da(x)$ sei für alle $t > o$ konvergent, und es gelte

$R(t) = O(e^{-m \cdot t^r})$, $m > o$, für $t \to \infty$.

Behauptungen

I Im Fall $\varrho_1 > o$ existiert eine Konstante D so, daß

$a(x) = D + O(x^{-\beta})$ für $x \to \infty$ gilt.

II Im Fall $\varrho_1 = o$ gilt $a(x) = O(x^{-\beta})$ für $x \to \infty$.

Zum Schluß des Kapitels werden die bereits anfangs erwähnten speziellen Taubersätze von Avakumović, Vučković und Niemeyer im Rahmen dieses allgemeinen Satzes diskutiert sowie Beispiele angegeben, für die das Verhalten $O(x^{-\beta})$ nicht verbessert werden kann. In diesem Sinn ist der allgemeine Taubersatz also bestmöglich.

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für zahlreiche Ratschläge möchte ich Herrn Professor Dr. Horst Niemeyer herzlich danken.

I. KAPITEL

DIE MELLINTRANSFORMATION VON GANZEN FUNKTIONEN ENDLICHER ORDNUNG

In diesem Kapitel soll ein Satz bewiesen werden, der eine ganze Funktion vollständig durch ihre Mellintransformierte charakterisiert.
Zu diesem Zweck stellen wir zunächst einige Ergebnisse aus der Theorie der Mellintransformation und der Theorie der ganzen Funktionen ohne Beweis zusammen.

§ 1 DIE MELLINTRANSFORMATION

Definition 1 [+] (L^1 - Mellintransformation)

Es sei $x^{k-1} f(x) \in L^1(o,\infty)$. Dann heißt die Funktion

$$F(w) = \int_0^\infty f(x)\, x^{w-1}\, dx \qquad , w=k+iv$$

die Mellintransformation der Funktion $f(x)$.

Lemma 1 (L^2 - Mellintransformation) [15.1]

Es sei $x^{k-\frac{1}{2}} f(x) \in L^2(o,\infty)$.

a) Dann konvergiert

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)\, x^{w-1}\, dx \qquad , w=k+iv ,$$

im quadratischen Mittel über $(k-i\infty , k+i\infty)$ für $a \to \infty$

[+] Im folgenden wird mit einem großen Buchstaben ausschließlich die Mellintransformierte der mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichneten Funktion charakterisiert.

gegen eine Funktion $F(w) \in L^2(k-i\infty, k+i\infty)$, die L^2 - Mellintransformation von $f(x)$ genannt wird.

b) Umgekehrt konvergiert

$$\frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int_{k-ia}^{k+ia} F(w)\, x^{-w}\, dw$$

im quadratischen Mittel über (o,∞) für $a \to \infty$ fast überall gegen $x^{k-\frac{1}{2}} f(x)$.

Den Zusammenhang zwischen der L^1 - Mellintransformation und der L^2 - Mellintransformation klärt der folgende Hilfssatz.

Lemma 2 [15.2]

Es sei $x^{k-1} f(x) \in L^1(o,\infty)$ und $x^{k-\frac{1}{2}} f(x) \in L^2(o,\infty)$. Dann stimmen die L^1- und die L^2- Mellintransformation von $f(x)$ im Intervall $(k-i\infty, k+i\infty)$ fast überall überein.
(Eine analoge Aussage gilt für die Umkehrtransformation.)

Lemma 3 (Parsevalsche Gleichung) [15.3]

Es sei $x^{k-\frac{1}{2}} f(x) \in L^2(o,\infty)$. Dann gilt:

$$\int_o^\infty x^{2k-1} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k+iv)|^2\, dv \quad .$$

Hieraus folgt insbesondere eine Eindeutigkeitsaussage für die L^2- Mellintransformation. Für die L^1- Mellintransformation ergibt sich ein für unsere Zwecke ausreichender Eindeutigkeitssatz aus dem folgenden Darstellungstheorem.

Lemma 4 [15.4]

Es sei $x^{k-1} f(x) \in L^1(o, \infty)$ und von beschränkter Variation in einer Umgebung des Punktes $x_o \neq o$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2}\left[f(x_o + o) + f(x_o - o)\right] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{k-iT}^{k+iT} F(w)\, x^{-w}\, dw \,.$$

Lemma 5 (Faltung) [15.5]

Es seien $x^{k-\frac{1}{2}} f(x)$ und $x^{k-\frac{1}{2}} h(x) \in L^2(o, \infty)$. Dann gilt für alle $x > o$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(w)\, H(w)\, x^{-w}\, dw = \int_o^\infty \frac{f(y)}{y}\, h\left(\frac{x}{y}\right) dy \,.$$

Mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes kann das Verhalten einer Funktion aus der Kenntnis des Regularitätsbereiches ihrer Mellintransformation bestimmt werden.

Lemma 6 [+)]

Voraussetzungen:

$\alpha)$ $x^{k-1} f(x) \in C^1(o,\infty) \cap L^1(o,\infty)$.

$\beta)$ i: $F(w)$ sei holomorph in $k \leq u \leq \varrho+\eta$ $(\varrho > k,\ \eta > o)$ mit Ausnahme einer höchstens einfachen Polstelle in $w=\varrho$ mit dem Residuum r_o.

ii: In $k \leq u \leq \varrho+\eta$ gelte gleichmäßig bezüglich u $\lim\limits_{|v|\to\infty} F(u+iv) = o$.

iii: $F(w) \in L^1(\varrho+\eta-i\infty, \varrho+\eta+i\infty)$.

Behauptung:

$$f(x) = \frac{-r_o}{x^{\varrho}} + O\left(\frac{1}{x^{\varrho+\eta}}\right) \qquad \text{für } x \to \infty .$$

Beweis:

Es sei $\mathcal{L}_T$ die positiv orientierte Randkurve des Rechtecks mit den Eckpunkten $k \pm iT$, $\varrho+\eta \pm iT$. Mit Hilfe des Residuensatzes erhalten wir, $\arg(x^{-w}) = o$ für w positiv reell,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{L}_T} F(w)\, x^{-w}\, dw = \frac{r_o}{x^{\varrho}} .$$

Für $T \to \infty$ verschwinden wegen ß ii die Beiträge des Integrals über die horizontalen Rechteckseiten, und mit Lemma 4, α und ß iii erhalten wir

---

[+)] Im Fall $\varrho < k$ und $\eta < o$ ergibt sich analog eine Aussage für $x \to o$.

$$f(x) = -\frac{r_0}{x^{\varsigma}} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\varsigma+\eta-i\infty}^{\varsigma+\eta+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw \quad .$$

Aus

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\varsigma+\eta-i\infty}^{\varsigma+\eta+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw \right| \leq \frac{1}{2\pi\, x^{\varsigma+\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\varsigma+\eta+iv)|\, dv$$

folgt schließlich die Behauptung.

§2 ORDNUNG UND TYP GANZER FUNKTIONEN

Definition 2 (Ordnung)

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Dann heißt

$$\omega = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log \left\{ \max_{|z|=r} |f(z)| \right\}}{\log r} \qquad 0 \leq \omega \leq \infty$$

die Ordnung von $f(z)$.

Definition 3 (Typ)

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung ω mit $0 < \omega < \infty$.

Dann heißt

$$\tau = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \left\{ \operatorname{Max}_{|z|=r} |f(z)| \right\}}{r^{\omega}} \qquad 0 \leq \tau \leq \infty$$

der Typ von $f(z)$.

Eine unmittelbare Folge der beiden letzten Definitionen ist der folgende Hilfssatz.

Lemma 7

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere ein $C(\varepsilon) > 0$ so, daß

$$|f(z)| \leq C(\varepsilon)\, e^{(\tau + \varepsilon)|z|^{\omega}}$$

$0 < \omega < \infty$, $0 \leq \tau < \infty$, für alle z gilt.
Dann ist $f(z)$ höchstens von der Ordnung ω , und, falls $f(z)$ genau von der Ordnung ω ist, höchstens vom Typ τ .

Lemma 8 [4.1]

Es sei $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion der Ordnung $\leq \omega$, $0 < \omega < \infty$, und des Typs $\leq \tau$, falls $f(z)$ von der Ordnung ω ist.
Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$ so, daß

$$\sum_{0}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq C(\varepsilon)\, e^{(\tau + \varepsilon)|z|^{\omega}}$$

für alle z gilt. Im Fall Ordnung $f(z) < \omega$ kann $\tau = o$ gesetzt werden.

Lemma 9 [4.2]

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung ω und des Typs τ.
Dann ist auch $f'(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung ω und des Typs τ.

§ 3 DIE MELLINTRANSFORMATION VON GANZEN FUNKTIONEN ENDLICHER ORDNUNG

Im folgenden werden zwei Funktionenklassen $A(k, \omega, \tau)$ und $B(k, \omega, \tau)$ definiert, die durch die L^2- Mellintransformation bzw. durch die inverse L^2- Mellintransformation umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet werden (Satz 1).

Sätze von ähnlichem Typ über Funktionen, die in einem Winkelraum holomorph sind und Potenzabschätzungen genügen bzw. die in einer Umgebung des Nullpunktes holomorph sind, werden von G. Doetsch [5] bzw. von James L. Griffith [8] diskutiert.

Definition der Klasse $A(k,\omega,\tau)$

$\varphi(x) \in A(k,\omega,\tau)$ genau dann, wenn

A_1: die Funktion $\varphi(x)$ auf dem Intervall (o,∞) definiert ist und $x^{k-1/2}\cdot\varphi(x) \in L^2(o,\infty)$, $k>o$ fest, gilt.

A_2: zu $\varphi(x)$ eine ganze Funktion $f(z)$ der Ordnung ω, $o<\omega<\infty$, und des Typs τ, $o\leq\tau<\infty$, so existiert, daß fast überall $f(x)=\varphi(x)$ gilt.

Definition der Klasse $B(k,\omega,\tau)$

$\phi(k+iv) \in B(k,\omega,\tau)$ genau dann, wenn

B_1: die Funktion $\phi(k+iv)$, $k>o$ fest, auf dem Intervall $(k-i\infty, k+i\infty)$ definiert ist und $\phi(k+iv) \in L^2(k-i\infty, k+i\infty)$ gilt.

B_2: zu $\phi(w)$ eine im Gebiet $\mathrm{Re}\, w < k$ meromorphe Funktion $F(w)$ existiert mit den Eigenschaften:

i) alle Pole sind von erster Ordnung und können höchstens an den Stellen $w=-n$, $n=0,1,\ldots$, liegen.

ii) für $o<u<k$ ist $F(w) \in L^2(u-i\infty, u+i\infty)$, und es gilt $\underset{u\to k-o}{\text{l.i.m.}}\, F(u+iv) = \phi(k+iv)$.

iii) $F(u+iv)$ verschwindet für $|v|\to\infty$ gleichmäßig bezüglich u in jedem kompakten Teilintervall von $o\leq u<k$.

iv) es existieren kleinste Zahlen ω, $o<\omega<\infty$, und

τ, $o \leq \tau < \infty$, dergestalt, daß für jedes ε mit $o < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$,
$[w = r\, e^{i\varphi}]$

$$F(w) = e^{\frac{r\cos\varphi}{\omega}\log\frac{-r\cos\varphi}{e\,\omega(\tau+\varepsilon)}} \begin{cases} o(1) \text{ für } |\pi-\varphi| \geq \varepsilon, \ \mathrm{Re}\ w < o \\ O(1) \text{ für } |\pi-\varphi| \leq \varepsilon, \ \mathrm{Re}\ w < o \end{cases} \qquad r = n + \frac{1}{2}$$

gleichmäßig in φ für $r \to \infty$ gilt. +)

Aus der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung folgt unmittelbar, daß die Funktion $f(z)$ durch die Funktion $\varphi(x) \in A(k, \omega, \tau)$ eindeutig bestimmt ist. Im Anschluß an Satz 1 werden wir zeigen, daß auch die Funktion $F(w)$ durch die Funktion $\phi(k+iv) \in B(k, \omega, \tau)$ eindeutig bestimmt ist.

Satz 1

I) Ist $\varphi \in A(k, \omega, \tau)$, so ist die L^2- Mellintransformierte

$$\phi(k+iv) = \underset{a \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \varphi(x)\, x^{k+iv-1}\, dx$$

ein Element aus $B(k, \omega, \tau)$.

+) Die in die Symbole O(1) und o(1) eingehenden Größen hängen, bei vorgegebenem $F(w)$, also höchstens von ε ab.

II) Ist umgekehrt $\phi \in B(k,\omega,\tau)$, so ist die inverse L^2- Mellintransformierte $\varphi(x)$

$$x^{k-\frac{1}{2}} \cdot \varphi(x) = \underset{T \to \infty}{l.i.m.} \frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int_{k-iT}^{k+iT} \phi(w)\, x^{-w}\, dw$$

ein Element aus $A(k,\omega,\tau)$.

Beweis von Satz 1

I) Es sei $\varphi \in A(k,\omega,\tau)$.

Zu B_1)

Dann ist nach Lemma 1 für $\phi(k+iv)$ B_1 erfüllt.

Zu B_2)

Wir konstruieren im folgenden eine Funktion F(w) und zeigen, daß diese die Eigenschaften i) - iv) besitzt.

Es ist $x^{u-1} \cdot \varphi(x) \in L^1(o,\infty)$ für $o < u < k$, da $\varphi(x)$, im folgenden wird o.B.d.A. $\varphi(x)$ als stetig vorausgesetzt, nach A_2 in der Umgebung des Nullpunktes beschränkt ist, und an der oberen Grenze

$$\varphi(x) \cdot x^{u-1} = x^{u-k-\frac{1}{2}} \cdot \varphi(x)\, x^{k-\frac{1}{2}}$$

sich als Produkt zweier L^2- Funktionen schreiben läßt.

Mit $\varphi(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ folgt für $0 < u < k$, $R > 0$

$$(1.1) \quad \int_0^\infty \varphi(x)\, x^{w-1}\, dx = \int_0^R \varphi(x)\, x^{w-1} dx + \int_R^\infty \varphi(x)\, x^{w-1}\, dx$$

$$= \sum_0^\infty \frac{a_n R^{n+w}}{n+w} + \int_R^\infty \varphi(x)\, x^{w-1}\, dx \quad ,$$

wobei das letzte Integral für $\mathrm{Re}\, w < k$ konvergiert.
Wir setzen

$$(1.2) \qquad F(w) := \sum_0^\infty \frac{a_n R^{n+w}}{n+w} + \int_R^\infty \varphi(x)\, x^{w-1}\, dx \quad .$$

Zu B_2 i)

Aus (1.2) folgt unmittelbar, daß $F(w)$ im Gebiet $\mathrm{Re}\, w < k$ meromorph ist, höchstens einfache Pole für $w=-n$, $n=0,1 \ldots$, besitzen kann und unabhängig von der positiven Zahl R ist.

Zu B_2 ii)

Es ist $x^{u-\frac{1}{2}} \varphi(x) \in L^2(0,\infty)$ für $0 < u \leq k$, da $\varphi(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes beschränkt und $x^{k-\frac{1}{2}} \cdot \varphi(x) \in L^2(0,\infty)$ ist. Also existiert $\int_0^\infty \varphi(x)\, x^{w-1}\, dx$ für $0 < u < k$ im L^1- und L^2- Sinn, besitzt also in jedem Fall nach Lemma 2 denselben Wert $F(w) \in L^2(u-i\infty, u+i\infty)$.

Schließlich folgt aus Lemma 3

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(u+iv)-\phi(k+iv)|^2\,dv = \int_0^\infty \left|\varphi(x)\,x^{k-\frac{1}{2}} - \varphi(x)\,x^{u-\frac{1}{2}}\right|^2 dx$$

$$= \int_0^\infty \left|\varphi(x)\cdot x^{k-\frac{1}{2}}\right|^2 \quad (x^{u-k}-1)^2\,dx\ .$$

Mit dem Satz von Lebesgue folgt daraus

$$\lim_{u\to k-o} \| F(u+iv) - \phi(k+iv)\|_{L^2} = 0\ .$$

Zu B_2 iii)

Setzen wir in (1.2) $R=1$, so folgt

$$F(w) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+w} + \int_1^\infty \varphi(x)\,x^{w-1}\,dx\ . \tag{1.3}$$

Für $o \le u < k$, $|v| \ge T > o$ gilt

$$\left|\sum_0^\infty \frac{a_n}{n+w}\right| \le \frac{1}{T}\sum_0^\infty |a_n|\ , \tag{1.4}$$

$$\left|\int_1^\infty \varphi(x)\,x^{w-1}\,dx\right| \le \sqrt{\int_1^\infty |\varphi(x)|^2\,x^{2k-1}\,dx}\ \sqrt{\frac{1}{2(k-u)}}\ . \tag{1.5}$$

wegen (1.4) und des Satzes von Riemann - Lebesgue angewandt auf das L^1- Integral in (1.3) folgt $\lim_{|v|\to\infty} F(u+iv) = o$ für jedes feste u mit $o \le u < k$.

Wegen (1.4) und (1.5) ist $F(w)$ für $|v| \geq T > o$ in jedem kompakten Teil des Intervalls $o \leq u < k$ gleichmäßig beschränkt.

Aus den beiden letzten Resultaten erhalten wir die Eigenschaft B_2 iii) mit Hilfe eines Satzes von Montel [4.3] .

Zu B_2 iv)

Mit (1.2) ergibt sich nach Einführen von Polarkoordinaten $w=r\,e^{i\varphi}$ die Ungleichung

$$(1.6) \qquad |F(w)| \leq R^{r\cos\varphi} \sum_{o}^{\infty} \frac{|a_n|\, R^n}{|w+n|} + \left| \int_R^{\infty} \varphi(x)\, x^{w-1}\, dx \right| ,$$

die für jedes $R > o$ und w mit $\operatorname{Re} w < k$ gilt. Es sei ein ε mit $o < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ vorgegeben.

Wir betrachten zunächst den Fall $|\pi - \varphi| \geq \varepsilon$, $\operatorname{Re} w < o$.

Es ist $|w+n| \geq r|\sin\varphi|$, da die Hypotenuse $|w+n|$ des rechtwinkligen Dreiecks $\{w, -n, \operatorname{Re} w\}$ größer als die Kathete $r|\sin\varphi|$ ist. Mit der obigen Einschränkung folgt schließlich $|w+n| \geq r \sin\varepsilon$. Aus (1.6) folgt mit Lemma 8

$$(1.7) \qquad |F(w)| \leq \frac{C\, R^{r\cos\varphi}\, e^{(\tau+\varepsilon)R^{\omega}}}{r \sin\varepsilon} + \left| \int_R^{\infty} \varphi(x)\, x^{w-1}\, dx \right| .$$

Setzen wir

$$(1.8) \qquad R = \operatorname{Max} \left\{ \left(\frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)\omega} \right)^{\frac{1}{\omega}} , 1 \right\} ,$$

so ergibt sich für den ersten Term in (1.7) die Abschätzung

(1.9a) $$\frac{C}{r \sin\varepsilon} \; e^{\frac{r \cos\varphi}{\omega} \log \frac{-r \cos\varphi}{(\tau+\varepsilon) e \omega}} \qquad \text{falls } \frac{-r \cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)\omega} \geq 1 \,,$$

(1.9b) $$\frac{C}{r \sin\varepsilon} \; e^{\tau+\varepsilon} \qquad \text{falls } \frac{-r \cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)\omega} < 1 \,.$$

Zur Abschätzung des zweiten Terms in (1.7) ist eine aufwendigere Untersuchung erforderlich. Das Integral

$$\int_R^\infty \varphi(x) \; x^{w-1} \, dx$$

zerlegen wir in vier Bestandteile der Form

$$\int_R^\infty x^{r \cos\varphi - 1} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos(r \sin\varphi \log x) \\ \sin(r \sin\varphi \log x) \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \operatorname{Re} \varphi(x) \\ \operatorname{Im} \varphi(x) \end{matrix} \right\} dx \,.$$

O.B.d.A. beschäftigen wir uns im folgenden nur mit dem Integral

(1.10) $$\int_R^\infty x^{r \cos\varphi - 1} \cos(r \sin\varphi \log x) \operatorname{Re} \varphi(x) \, dx \,.$$

Auf (1.10) wenden wir den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung in der Form von Titchmarsh [16.1] an:

(1.11) $$R^{r \cos\varphi} \int_R^{S(R)} \cos(r \sin\varphi \log x) \, \frac{\operatorname{Re} \varphi(x)}{x} \, dx$$

mit $S(R) > R$. Im folgenden soll zunächst gezeigt werden, daß, R ist eine Funktion von r,

$$(1.12) \qquad g(r,\varphi) := \int_R^{S(R)} x^{ir\sin\varphi} \frac{\mathrm{Re}\,\varphi(x)}{x}\,dx = o(1)$$

für $r \to \infty$ gleichmäßig in dem von uns betrachteten Bereich von φ ist. Dies geschieht mit Hilfe der üblichen Beweisanordnung für den Satz von Riemann - Lebesgue. Es sei

$$(1.13) \qquad a = e^{\frac{\pi}{r|\sin\varphi|}} .$$

Dann ist für $R\cdot a < S(R)$

$$(1.14) \qquad g(r,\varphi) = \frac{1}{2}\int_R^{R\cdot a} x^{ir\sin\varphi} \frac{\mathrm{Re}\,\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{R\cdot a}^{S(R)} x^{ir\sin\varphi}\,\mathrm{Re}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(x/a)}{x}\,dx$$

$$- \frac{1}{2}\int_{S(R)}^{S(R)\cdot a} x^{ir\sin\varphi} \frac{\mathrm{Re}\,\varphi(x/a)}{x}\,dx .$$

Wir erhalten

$$(1.15) \qquad \left|\int_R^{R\cdot a} x^{ir\sin\varphi} \frac{\mathrm{Re}\,\varphi(x)}{x}\,dx\right| \leq \int_R^{R\cdot a} \frac{|\varphi(x)|}{x}\,dx$$

$$\leq \left\| x^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \varphi(x) \right\|_{L^2} \cdot \sqrt{\int_R^{R\cdot a} \frac{dx}{x^{2\varepsilon+1}}}$$

$$\leq \left\| x^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \varphi(x) \right\|_{L^2} \cdot R^{-\varepsilon} \sqrt{a-1}$$

$$\leq \left\| x^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \varphi(x) \right\|_{L^2} \cdot \sqrt{a-1} \qquad \text{wegen (1.8).}$$

Das dritte Integral in (1.14) kann wegen $R\cdot a < S(R)$ analog behandelt werden. Weiterhin ist

$$(1.16) \qquad \left| \int_{R\cdot a}^{S(R)} x^{ir \sin\varphi} \operatorname{Re} \frac{\varphi(x) - \varphi(x/a)}{x} \, dx \right|$$

$$\leq \int_1^{\infty} \frac{|\varphi(x\cdot a) - \varphi(x)|}{x} \, dx = o(1)$$

für $a \to 1$, wie man mit Hilfe der Stetigkeit von $\varphi(x)$ und der Konvergenz von

$$\int_1^{\infty} \frac{|\varphi(x)|}{x} \, dx$$

leicht sieht. Wegen $a = e^{\frac{\pi}{r|\sin\varphi|}} \leq e^{\frac{\pi}{r \sin\varepsilon}}$, (1.15) und (1.16) folgt damit unsere Behauptung (1.12) für $R\cdot a < S(R)$. Ist $R\cdot a \geq S(R)$, so ergibt sich diese direkt mit (1.15).

Somit erhalten wir für $|\pi - \varphi| \geq \varepsilon$, $\operatorname{Re} w < o$

$$(1.17a)\qquad F(w) = \frac{1}{r}\, e^{\frac{r\cos\varphi}{\omega}\,\log\frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)e\,\omega}} \cdot O(1)$$

$$+\, e^{\frac{r\cos\varphi}{\omega}\,\log\frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)\,\omega}} \cdot o(1)$$

$$= e^{\frac{r\cos\varphi}{\omega}\,\log\frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)e\,\omega}} \cdot o(1)$$

für $r\to\infty$ und $\frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)\,\omega} \geq 1$. Für $\frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)\,\omega} < 1$ ergibt sich

$$(1.17b)\qquad F(w) = O(\tfrac{1}{r}) + o(1) = o(1) \ .$$

Da $0 < C_1 \leq e^{-\frac{t}{\omega}\log\frac{t}{(\tau+\varepsilon)e\cdot\omega}} \leq C_2 < \infty$ für $0 < t \leq 1$ ist, $t = -r\cos\varphi$, erhält man aus (1.17) den ersten Teil der Behauptung B_2 iv) .

Wir betrachten schließlich den Fall $|\pi - \varphi| \leq \varepsilon$, Re $w < 0$.

Für $r = n+\frac{1}{2}$ gilt $|w+n| \geq \frac{1}{2}$. Hiermit erhalten wir aus (1.6)

$$|F(w)| \leq 2C\, R^{r\cos\varphi}\, e^{(\tau+\varepsilon)R\omega} + \int_R^\infty x^{r\cos\varphi - 1}\cdot|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq 2C\, R^{r\cos\varphi}\, e^{(\tau+\varepsilon)R\omega} + \left\| x^{k-\frac{1}{2}}\,\varphi(x)\right\|_{L^2} \frac{R^{r\cos\varphi - k}}{\sqrt{2(k-r\cos\varphi)}} \ .$$

Wir setzen $R = \left(\frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)\,\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}}$. Wegen $-r\cos\varphi \geq +r\cos\varepsilon$

folgt

$$F(w) = O\left(e^{\frac{r\cos\varphi}{\omega}} \log \frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)e\,\omega} \right)$$

für $r \to \infty$ gleichmäßig in dem von uns betrachteten Bereich.

Damit haben wir die erste Behauptung des Satzes bewiesen, bis auf den Teil von B_2 iv) , daß die Zahlen ω und τ nicht verbessert werden können.

II) Es sei $\phi(k+iv) \in B(k, \omega, \tau)$.

Wir konstruieren im folgenden eine ganze Funktion $f(z)$, Teil α dieses Beweises, und zeigen anschließend, daß diese die Eigenschaft A_2 besitzt, Teile ß und γ dieses Beweises.

$\underline{\alpha}$)

Nach B_2 ii und Lemma 1 existieren für jedes feste u mit $o < u < k$ die Integrale

$$(1.18)\quad x^{u-\frac{1}{2}} \tilde{f}_u(x) = \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{x^{u-\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int_{u-iT}^{u+iT} x^{-w} F(w)\, dw \quad .$$

Wir zeigen zuerst, daß auch die Grenzwerte

$$(1.19)\quad f_u(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{u-iT}^{u+iT} x^{-w} F(w)\, dw$$

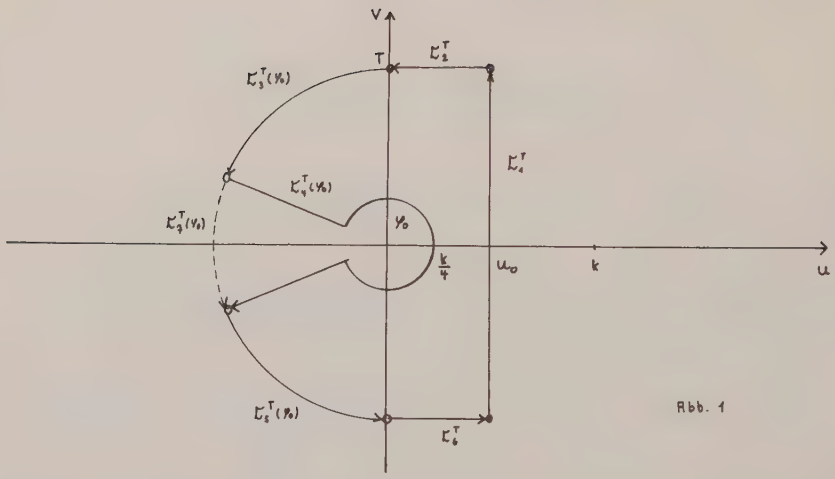

Abb. 1

für $o < u < k$, $o < x < \infty$ existieren, und folglich für jedes feste zulässige u für fast alle x mit (1.18) übereinstimmen.

Es sei $\mathcal{L}$ die in Abb.1 angegebene,geschlossene Kurve. Wegen B_2 i) gilt für festes $x > o$

$$(1.20) \qquad \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{L}} x^{-w} F(w)\, dw = 0 \quad .$$

Für $T \to \infty$ verschwinden nach B_2 iii) die Integrale über $\mathcal{L}_2^T$ und $\mathcal{L}_6^T$.

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}_3^T(\gamma_0)} x^{-w} F(w)\, dw \right| = o(T) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma_0} x^{-T\cos\varphi} \, e^{\frac{T\cos\varphi}{\omega} \log \frac{-T\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)e\omega}} \, d\varphi$$

$$= o(T) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma_0} e^{\frac{T\cos\varphi}{\omega} \log \frac{-T\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)e\cdot\omega\cdot x^{\omega}}} \, d\varphi$$

$$= o(T) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} e^{\frac{T\cos\varphi}{\omega}\log\frac{-T\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)e\,\omega\,x^{\omega}}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\,d\varphi$$

$$= o(1) \int_{0}^{T} e^{\frac{-t}{\omega}\log\frac{t}{(\tau+\varepsilon)e\,\omega\,x^{\omega}}}\,dt = o(1)$$

für $T \to \infty$. Somit verschwinden für $T \to \infty$ auch die Integrale über $\mathcal{L}_3^T(\varphi_0)$ und analog über $\mathcal{L}_5^T(\varphi_0)$.

Wegen

$$x^{-w}\,F(w) = o(1)\; e^{\frac{r\cos\varphi}{\omega}\log\frac{-r\cos\varphi}{(\tau+\varepsilon)e\cdot\omega\cdot x^{\omega}}}$$

für $r \to \infty$ existiert das Integral über $\mathcal{L}_4^T(\varphi_0)$ für jedes feste φ_0 , $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$, beim Grenzübergang $T \to \infty$, und wir erhalten aus (1.20) die Existenz des Grenzwertes (1.19) und die Relation

$$(1.21) \qquad f_{u_o}(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}_4^{\infty}(\varphi_0)} x^{-w}\,F(w)\,dw \quad .$$

Da (1.21) für alle zulässigen Werte u_o und φ_0 gilt, sind $f_{u_o}(x)$ und das Integral von u_o und φ_0 unabhängig.

Nach dem Residuensatz gilt weiterhin , s. Abb. 1 ,

$$(1.22) \qquad \frac{1}{2i\pi}\left\{ -\int_{\mathcal{L}_4^{m+\frac{1}{2}}(\varphi_0)} + \int_{\mathcal{L}_7^{m+\frac{1}{2}}(\varphi_0)} \right\} x^{-w}\,F(w)\,dw$$

$$= \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \quad ,$$

wenn wir mit a_n das Residuum von $F(w)$ an der Stelle $w=-n$ bezeichnen. Nach B_2 iv) gilt

$$(1.23) \qquad \int_{\mathcal{L}_7^{m+\frac{1}{2}}(\gamma)} x^{-w} F(w)\, dw$$

$$= O(m+\tfrac{1}{2}) \int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} e^{\frac{(m+\frac{1}{2})\cos\varphi}{\omega}} \log \frac{-(m+\frac{1}{2})\cos\varphi}{(\tau+\xi)\cdot e\cdot\omega\cdot x^{\omega}}\, d\varphi \quad ,$$

und wegen $-1 \leq \cos\varphi \leq -\cos(\pi - \varphi_0)$ verschwindet dieser Ausdruck für $m \to \infty$. Somit ergibt sich aus (1.22) und (1.23)

$$(1.24) \qquad f_{u_0}(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \quad ,$$

wobei die Reihe für alle $x > 0$ konvergiert, d.h.

$$(1.25) \qquad f(z) := \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

ist eine ganze Funktion mit

$$(1.26) \qquad f(x) = f_{u_0}(x)$$

für $0 < x < \infty$.

ß)

Wir zeigen in diesem Teil des Beweises, daß $f(z)$ mindestens von der Ordnung ω und vom Typ τ ist.

Die Funktion $\eta = g(\varepsilon) = (\tau+\varepsilon)\, e^{\pi\omega\tan\varepsilon} - \tau$

$$\frac{\omega\,\pi\,\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = \log\frac{\tau+\eta}{\tau+\varepsilon}$$

ist für $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ stetig und streng monoton wachsend mit $g(0) = 0$, $\lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}} g(\varepsilon) = \infty$.

Zu vorgegebenem $\eta > 0$ bestimmen wir $\varepsilon > 0$ dergestalt, daß

(1.27) $$\frac{\eta}{2} = g(\varepsilon)$$

ist. Da das Integral (1.21) wegen

(1.28) $$|z^{-w}| = e^{-r\cos\varphi\,\log|z| + \arg z\cdot r\cdot\sin\varphi}$$

$|\arg z| \leq \pi$, auch für komplexe Zahlen z existiert, folgt wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung

(1.29) $$f(z) = \frac{-1}{2i\pi}\int_{L_4^{\infty}(\pi-\varepsilon)} z^{-w}\,F(w)\,dw$$

$$= O(1) \int_{-\pi+\varepsilon}^{+\pi-\varepsilon} |z|^{-\frac{k}{4}\cos\varphi}\, d\varphi \quad +$$

$$o(1) \int_{\frac{k}{4}}^{\infty} e^{\frac{-r\cos\varepsilon}{\omega}\log\frac{r\cos\varepsilon}{(\tau+\varepsilon)e\,\omega|z|^{\omega}} + \pi r\sin\varepsilon}\, dr$$

und wegen (1.27)

$$= O(|z|^{\frac{k}{4}}) + o(1) \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-r\cos\varepsilon}{\omega}\log\frac{r\cos\varepsilon}{(\tau+\frac{1}{2})e\,\omega|z|^{\omega}}}\, dr$$

und mit $t = \dfrac{r\cos\varepsilon}{(\tau+\frac{1}{2})e\,\omega|z|^{\omega}}$

$$= O(|z|^{\frac{k}{4}}) + o(|z|^{\omega}) \int_{0}^{\infty} e^{-(\tau+\frac{1}{2})e|z|^{\omega}t\log t}\, dt$$

für $|z| \to \infty$. Nach der Taylorschen Formel ist

$$-t\log t = \frac{1}{e} - \frac{(t-\frac{1}{e})^2}{2\zeta}$$

mit $\zeta = \frac{1}{e} + \vartheta(t-\frac{1}{e})$, $0 < \vartheta < 1$. Damit folgt

(1.30)
$$\int_0^\infty e^{-(\tau+\eta_{1/2})e\,|z|^\omega\, t\,\log t}\,dt$$
$$= e^{(\tau+\eta_{1/2})\,|z|^\omega}\int_0^\infty e^{-(\tau+\eta_{1/2})e\,|z|^\omega\,\frac{(t-\frac{1}{e})^2}{2\zeta}}\,dt$$

und für $|z| \geq \left[(\tau+\eta_{1/2})e\right]^{\frac{-1}{\omega}}$

$$\leq e^{(\tau+\eta_{1/2})\,|z|^\omega}\int_0^\infty e^{-\frac{(t-\frac{1}{e})^2}{2\zeta}}\,dt$$
$$= e^{(\tau+\eta_{1/2})\,|z|^\omega}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{e}-t\log t}\,dt\,,$$

d.h. mit (1.29) und (1.30) erhalten wir

$$f(z) = O\left(e^{(\tau+\eta)\,|z|^\omega}\right) \qquad \text{für } |z|\to\infty\,,$$

und mit Lemma 7 folgt die Behauptung bis auf die Aussage, daß $f(z)$ genau von der Ordnung ω und vom Typ τ ist.

$\underline{\delta}$)

Schließlich haben wir noch zu zeigen, daß $f(x) = \varphi(x)$ fast überall gilt.

Es sei $\{b_n\}$ mit $0 < b_n < k$ eine Nullfolge. Nach (1.18), (1.19) und (1.26) gilt:

$$x^{-b_n} f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(w-b_n)\, x^{-w}\, dw \quad .$$

Mit Lemma 3 erhalten wir

$$\int_0^\infty \left| x^{-b_n} f(x) - \varphi(x) \right|^2 x^{2k-1}\, dx = \frac{1}{2i\pi} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left| F(w-b_n) - \phi(w) \right|^2 dw$$

und schließlich wegen B_2 ii)

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\; x^{-b_n} f(x)\, x^{k-\frac{1}{2}} = \varphi(x)\, x^{k-\frac{1}{2}} \quad .$$

Dann muß aber eine Teilfolge von $\left\{ x^{-b_n} f(x) \right\}$ punktweise fast überall gegen $\varphi(x)$ konvergieren, und hieraus folgt $\varphi(x) = f(x)$ fast überall.

Es bleibt im Fall I wie im Fall II zu beweisen, daß die Zahlen ω und τ bestmöglich sind.

I) Wären die Zahlen ω und τ nicht bestmöglich in B_2 iv) , dann gäbe es Zahlen $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\tau}$ mit $\tilde{\omega} \leq \omega$, $\tilde{\tau} < \tau$ bzw. $\tilde{\omega} < \omega$, $\tilde{\tau} \leq \tau$ so, daß B_2 iv) für $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\tau}$ gälten.

Es würde aber mit dem bisher bewiesenen Teil II folgen, daß $f(z)$ höchstens von der Ordnung $\tilde{\omega}$ und gegebenenfalls vom Typ $\tilde{\tau}$ wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung.

II) Der Beweis verläuft analog.

Korollar

Zu einer Funktion $\phi(k+iv) \in L^2(k-i\infty, k+i\infty)$ gibt es höchstens eine meromorphe Fortsetzung im Sinne von B_2.

Beweis

Angenommen, es gäbe zwei in $\mathrm{Re}\, w < k$ verschiedene der oben erklärten Fortsetzungen $F_1(w)$ und $F_2(w)$. Nach Beweis zu Satz 1 Teil II γ gälte dann fast überall

$$x^{u_o-\frac{1}{2}} \varphi(x) = \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{x^{u_o-\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int_{u_o-iT}^{u_o+iT} x^{-w} F_1(w)\, dw$$

$$= \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{x^{u_o-\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int_{u_o-iT}^{u_o+iT} x^{-w} F_2(w)\, dw$$

$0 < u_o < k$, d.h. mit Lemma 1 fast überall

$$F_1(w) = \underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \varphi(x)\, x^{w-1}\, dx = F_2(w)$$

für $w=u_o+iv$. Da $F_1(w)$ und $F_2(w)$ aber auf dieser Geraden holomorph sind, folgt $F_1(w) \equiv F_2(w)$ in $\mathrm{Re}\, w < k$ aus der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung, im Widerspruch zur Annahme.

II. KAPITEL

EIN ALLGEMEINER TAUBERSATZ FÜR INTEGRALTRANSFORMATIONEN VON EXPONENTIELLEM ABFALL

In diesem Kapitel soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen an den Kern $k(x)$ und an die Funktion $a(x)$ aus

$$\int_0^\infty k(\tfrac{x}{t})\, da(x) = O(e^{-m\cdot t^\gamma}) \qquad \gamma, m > 0\ ,\ t \to \infty$$

auf $a(x) = O(x^{-\beta})$ für $x \to \infty$ geschlossen werden kann. Den Abschluß bildet die Diskussion einiger Spezialfälle und Beispiele.

§ 1 DIE KLASSE DER BETRACHTETEN KERNE

Wir betrachten in diesem Kapitel ausschließlich Kerne der folgenden Klasse:

Definition der Klasse $\mathfrak{K}(\gamma)$

$k(x) \in \mathfrak{K}(\gamma)$, $\gamma > 0$, genau dann, wenn es reelle Zahlen $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 > 0$ und $\eta > 0$ so gibt, daß

1. $k(x)$ für $x \geq 0$ stetig und $x^{\frac{\beta_2 - 1}{2}} \cdot k(x) \in L^2(0,\infty)$ ist.

2. die L^2- Mellintransformierte $K(w)$ von $k(x)$ in den

Streifen $-\varrho_1 - \eta \leq \mathrm{Re}\ w \leq \varrho_2 + \eta$ meromorph fortgesetzt werden kann,
genau zwei einfache Pole an den Stellen $-\varrho_1$ und ϱ_2 besitzt,
und dort gleichmäßig für $|\mathrm{Im}\ w| \to \infty$ $K(w) = O(|\mathrm{Im}\ w|^{-\delta})$ mit $\delta > 4$ gilt.

3. $[K(w)]^{-1}$ in die Halbebene $\mathrm{Re}\ w \leq \varrho_2 + \eta$ holomorph fortgesetzt werden kann,
und dort gleichmäßig für $|w| \to \infty$

$$\frac{1}{K(w)} = O\left[e^{a\,\mathrm{Re}\,w + \frac{\pi}{2\delta}|\mathrm{Im}\,w|} \cdot \begin{cases} |w|^{-\alpha} & \text{für } \varrho_1 > 0 \\ |w|^{-\alpha+1} & \text{für } \varrho_1 = 0 \end{cases} \right]$$

mit reellem a und positivem α gilt.

Beispiele

A) Für ganzzahliges $m \geq 0$ ist $h_m(x) = \dfrac{x^{m+1}}{(x+1)^{m+2}}$
aus $\mathfrak{A}(\frac{1}{2})$. [14]

Beweis: Wir setzen $\varrho_1 = m+1$, $\varrho_2 = 1$ und $\eta = \frac{1}{2}$.

Zu 1) $h_m(x)$ ist für $x \geq 0$ stetig und $\in L^2(0,\infty)$.

Nach [15.6] lautet die Mellintransformation von $h_m(x)$

$$H_m(w) = \frac{\Gamma(w+m+1)\cdot\Gamma(m+2-(w+m+1))}{\Gamma(m+2)}$$

$$= \frac{(w+m)\ \dots\ w}{(m+1)!}\ \Gamma(w)\cdot\Gamma(1-w)$$

$$= \frac{(w+m)\ \dots\ w}{(m+1)!}\cdot\frac{\pi}{\sin \pi w}$$

Zu 2) $H_m(w)$ ist in $-\frac{1}{2}-(m+1) \le u \le 1+\frac{1}{2}$ meromorph mit genau zwei einfachen Polstellen in $-\varrho_1 = -(m+1)$ und $\varrho_2 = 1$. Es gilt dort gleichmäßig bezüglich u

$$H_m(w) = O(|v|^{m+1}\, e^{-\pi|v|}) \qquad \text{für } |v| \to \infty .$$

Zu 3) $[H_m(w)]^{-1}$ ist in $u \le 1+\frac{1}{2}$ (sogar in der gesamten Ebene) holomorph, und es gilt dort gleichmäßig bezüglich arg w

$$[H_m(w)]^{-1} = O(|w|^{-m-1}\, e^{\pi|v|}) \qquad \text{für } |w| \to \infty .$$

B) Für $\varrho > 1$ ist $g_\varrho(x) = (1+x)^{-\varrho+1} \in \mathfrak{K}(\gamma)$ für jedes feste γ mit $0 < \gamma \le 1/2$. [18]

Beweis: Wir setzen $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = \varrho - 1$ und $\eta = \frac{1}{2}$.

Zu 1) $g_\varrho(x)$ ist für $x \ge 0$ stetig und $x^{\frac{\varrho-2}{2}}\, g_\varrho(x) \in L^2(0,\infty)$.

Nach [15.6] lautet die Mellintransformation von $g_\varrho(x)$

$$G_\varrho(w) = \frac{\Gamma(w)\ \Gamma(\varrho-1-w)}{\Gamma(\varrho-1)} \quad .$$

Zu 2) $G_\varrho(w)$ ist in $-\frac{1}{2} \le u \le (\varrho-1)+\frac{1}{2}$ meromorph mit genau zwei einfachen Polstellen in $-\varrho_1 = o$ und $\varrho_2 = \varrho-1$. Nach [13.1] gilt dort gleichmäßig bezüglich u

$$G_\varrho(w) = O(|v|^{\varrho-2}\ e^{-\pi|v|}) \qquad \text{für } |v| \to \infty .$$

Zu 3) $[G_\varrho(w)]^{-1}$ ist in $u \le (\varrho-1)+\frac{1}{2}$ (sogar in der ganzen Ebene) holomorph. Mit Hilfe der Stirlingschen Formel folgt, daß dort für $|w| \to \infty$, $|\arg w| \ge \varepsilon > o$ gleichmäßig bezüglich arg w gilt:

$$\frac{1}{G_\varrho(w)} = \frac{\Gamma(\varrho-1)\ \sin \pi w\ \ \Gamma(1-w)}{\pi \cdot \Gamma(\varrho-1-w)}$$

$$\cong \Gamma(\varrho-1)\ \sin \pi w\ \ \frac{e^{(\frac{1}{2}-w)\log(1-w)\ -\ (1-w)}}{\pi \cdot e^{(\varrho-w-\frac{3}{2})\ \log(\varrho-w-1)\ -\ (\varrho-1-w)}}$$

$$= O(|w|^{-\varrho+2}\ |\sin \pi w| \cdot \left| e^{w \log \frac{\varrho-w-1}{1-w}} \right|)$$

$$= O(|w|^{-\varrho+2}\ |\sin \pi w|) = O(|w|^{-\varrho+2}\ e^{\pi|v|})$$

$$= O(|w|^{-\varrho+2}\ e^{\frac{\pi}{2\gamma}|v|}) \qquad \text{für } o < \gamma \le \tfrac{1}{2}.$$

Es ist also in $\mathfrak{K}(\gamma)$ a=o und $\alpha = \varrho-1$ zu setzen.

§ 2 TAUBERBEDINGUNGEN

Im nächsten Paragraphen werden wir einen allgemeinen Taubersatz auf den folgenden, speziellen Taubersatz von Ingham [9] zurückführen.

Satz 2 (Taubersatz von Ingham)

Voraussetzungen:

1) Die Funktion $a(x)$, $a(o) = o$, sei reell für $x \geq o$ und dort in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation.

2) Es gebe eine Funktion $H(\delta)$ so, daß für alle $\delta > o$ und $x \leq x' \leq x+\delta$, $x \geq x_o(\delta)$ $a(x')-a(x) \geq -H(\delta)$ ist.

3) Das Integral

$$\varphi(s) = \int_o^\infty e^{-sx}\, da(x)$$

sei konvergent für $\operatorname{Re} s > o$, und die Funktion

$$\frac{1}{s}\left[\varphi(s) - \varphi(o)\right]$$

sei stetig für $\operatorname{Re} s \geq o$, $-T \leq \operatorname{Im} s \leq T$.

Behauptung:

Dann ist

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \left|a(x) - \varphi(o)\right| \leq M\, H\left(\frac{1}{T}\right) ,$$

wobei M eine absolute Konstante ist.

Wir übernehmen im wesentlichen die Tauberbedingungen 1) und 2) von Ingham, die als verallgemeinerte Monotonieeigenschaften interpretiert werden können. Die unten hinzugefügte Bedingung 3) in $\mathcal{T}(\gamma,\beta)$ bedeutet für die Anwendung keine Einschränkung, da das Hauptglied bereits von der Ordnung $x^{\gamma-\beta}$ ist, und das Verhalten also o.B.d.A. für das Restglied $a(x)$ als a-priori-Abschätzung gefordert werden kann.

Definition der Klasse $\mathcal{T}(\gamma,\beta)$ +)

$a(x) \in \mathcal{T}(\gamma,\beta)$ genau dann, wenn

1) $a(o)=o$, $a(x)$ für $x \geq o$ reell und dort in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation ist.

2) es eine Funktion $H(\delta)$ und Zahlen $\gamma > o$ und β so gibt, daß für alle $\delta > o$ und $x \leq x' \leq x+\delta$, $x \geq x_o(\delta)$

$$x'^{\frac{\beta}{\gamma}} a(x'^{\frac{1}{\gamma}}) - x^{\frac{\beta}{\gamma}} a(x^{\frac{1}{\gamma}}) \geq -H(\delta)$$ ist.

3) $a(x) = O(x^{\gamma-\beta})$ für $x \to \infty$ ist.

+) Statt 2) wird bisweilen auch die Tauberbedingung $x^{\beta}[a(x') - a(x)] > -c$ für $x \leq x' \leq x + x^{1-\gamma}$ verwendet. Für den Vergleich dieser Bedingung mit den Bedingungen 2) und 3) s. [18] .

§ 3 DER ALLGEMEINE TAUBERSATZ

Satz 3

Es sei $k(x) \in \mathfrak{K}(\gamma)$ und $a(x) \in \mathfrak{T}(\gamma,\beta)$, $\gamma > 0$, $-\gamma < \beta \leq \gamma$. Dann folgt aus der Konvergenz des Integrals

$$R(t) := \int_0^\infty k(\tfrac{x}{t})\, da(x)$$

für $t > 0$ und $R(t) = O(e^{-m \cdot t^\gamma})$, $m > 0$, für $t \to \infty$

1) im Fall $k(0) = 0$ die Existenz einer Konstanten D mit
$a(x) = D + O(x^{-\beta})$ für $x \to \infty$, +)

2) im Fall $k(0) \neq 0$ $a(x) = O(x^{-\beta})$ für $x \to \infty$.

Beweis

Der Satz soll zuerst für $\gamma = 1$ bewiesen werden. Im Anschluß daran werden wir die allgemeine Aussage auf den Fall $\gamma = 1$ durch eine Substitution zurückführen.

I) $\gamma = 1$

1) In diesem Teil des Beweises soll das obige Stieltjesintegral auf ein Integral der Form

---

+) Die Konstante D ist nur im Fall $\beta > 0$ für die Aussage des Satzes von Bedeutung.

$$\int_0^\infty k^*\left(\frac{x}{t}\right)\, a^*(x)\, dx$$

transformiert werden.

Nach Lemma 6 gilt [es kann in den Voraussetzungen von Lemma 6 z.B. $k = \frac{\varrho_2}{4}$ gesetzt werden]

$$(2.1) \qquad k(x) = -\frac{c_2}{x^{\varrho_2}} + O(x^{-\varrho_2-\eta}) \qquad \text{für } x \to \infty ,$$

$$(2.2) \qquad k(x) = c_1 x^{\varrho_1} + O(x^{\varrho_1+\eta}) \qquad \text{für } x \to 0 ,$$

mit $c_1, c_2 \neq 0$, d.h. für $x \geq x_1$ ist $k(x) \neq 0$. Wegen der Eigenschaften 1. und 2. von $\mathfrak{K}(1)$ und wegen Lemma 1b folgt

$$(2.3) \qquad k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\frac{\varrho_1}{2}-i\infty}^{\frac{\varrho_2}{2}+i\infty} K(w)\, x^{-w}\, dw$$

und hiermit, daß k(x) dreimal stetig differenzierbar ist und

$$(2.3a) \qquad k'(x) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{1+\frac{\varrho_1}{2}-i\infty}^{1+\frac{\varrho_2}{2}+i\infty} (w-1)\, K(w-1)\, x^{-w}\, dw$$

gilt. Analog Beweis zu Lemma 6 ergibt sich aus dieser

Darstellung

$$k'(x) = + \frac{\varrho_2 \cdot c_2}{x^{\varrho_2+1}} + O(x^{-\varrho_1-1-\eta}) \qquad \text{für } x \to \infty. \tag{2.4}$$

Für $x \geq x_1$ erhalten wir unter Beachten von

$$\int_{x_1}^{x} k(u)\, da(u) = \int_{x_1}^{\infty} k(u)\, da(u) + o(1) \qquad \text{für } x \to \infty$$

$$a(x) - a(x_1) = \int_{x_1}^{x} da(u) \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{k(x)} \int_{x_1}^{x} k(u)\, da(u) + \int_{x_1}^{x} \int_{x_1}^{t} k(u)\, da(u)\, \frac{k'(t)}{k^2(t)}\, dt$$

$$= -\frac{1}{k(x)} \int_{x}^{\infty} k(u)\, da(u) + \frac{1}{k(x_1)} \int_{x_1}^{\infty} k(u)\, da(u)$$

$$+ o\left(\int_{x_1}^{x} \left| \frac{k'(t)}{k^2(t)} \right| dt \right) .$$

Mit

$$\left| \frac{k'(t)}{k^2(t)} \right| = \frac{\varrho_2}{|c_2|}\, t^{\varrho_2-1} + O(t^{\varrho_2-1-\eta}) \qquad \text{für } t \to \infty$$

[nach (2.1) und (2.4)] erhalten wir schließlich aus (2.5)

wegen $\varrho_2 > 0$

$$a(x) = o(x^{\varrho_2}) \qquad \text{für } x \to \infty . \tag{2.6}$$

Aus

$$\int_0^R k(\tfrac{x}{t})\, da(x) = a(x)\, k(\tfrac{x}{t}) \Big|_0^R - \int_0^R k'(\tfrac{x}{t})\, \tfrac{1}{t}\, a(x)\, dx$$

folgt mit Eigenschaft $\gamma(1,\beta)$ 1) , (2.1) und (2.6) für $R \to \infty$

$$\int_0^\infty k(\tfrac{x}{t})\, da(x) = - \int_0^\infty k'(\tfrac{x}{t})\, \tfrac{1}{t}\, a(x)\, dx \quad . \tag{2.7}$$

Mit (2.4) und (2.6) ergibt sich

$$\int_{A_1}^{A_2} k'(\tfrac{x}{t})\, a(x)\, dx - c_2 \cdot \varrho_2 \cdot t^{\varrho_2+1} \int_{A_1}^{A_2} \frac{a(x)}{x^{\varrho_2+1}}\, dx \tag{2.8}$$

$$= O(t^{\varrho_2+1+\eta} \int_{A_1}^{A_2} \frac{dx}{x^{1+\eta}}) \quad .$$

Wegen der Existenz des Integrals (2.7) folgt hieraus die Existenz des Integrals

$$\int_1^\infty \frac{a(x)}{x^{\varrho_2+1}}\, dx$$

und die gleichmäßige Konvergenz des Integrals auf der rechten Seite von (2.7) für $t \in [T_1, T_2]$, $o < T_1, T_2 < \infty$. Damit erhalten wir für $\varsigma_4 > o$

$$(2.9) \qquad \int_{T_1}^{T_2} \frac{R(t)}{t}\, dt = \int_{T_1}^{T_2} \int_{o}^{\infty} k'(\tfrac{x}{t})\, (-\tfrac{x}{t^2})\, \frac{a(x)}{x}\, dx\, dt$$

$$= \int_{o}^{\infty} \left\{ k(\tfrac{x}{T_2}) - k(\tfrac{x}{T_1}) \right\} \frac{a(x)}{x}\, dx$$

$$= \int_{o}^{\infty} k(\tfrac{x}{T_2})\, \frac{a(x)}{x}\, dx - \int_{o}^{\infty} k(\tfrac{x}{T_1})\, \frac{a(x)}{x}\, dx \,.$$

Die letzte Umformung ist erlaubt, da die Integrale einzeln wegen (2.2) an der unteren Grenze sowie wegen (2.1) und (2.6) und der letzten Zeile von Seite 45 an der oberen Grenze existieren.

Aus (2.9) folgt die Existenz von

$$(2.10) \qquad c_3 := \lim_{T \to \infty} \int_{o}^{\infty} k(\tfrac{x}{T})\, \frac{a(x)}{x}\, dx \quad ,$$

ferner wegen (2.1) und (2.2) die Existenz des Integrals

$$(2.11) \qquad \int_{o}^{\infty} k(\tfrac{x}{T})\, \frac{1}{x}\, dx = \int_{o}^{\infty} k(x)\, \frac{1}{x}\, dx = K(o) \,.$$

Nach Eigenschaft 3) der Klasse $\mathfrak{K}(1)$ ist $K(o) \neq o$.

Somit erhalten wir zusammenfassend aus (2.9), (2.10) und (2.11)

$$R^*(T) := -T^{1+\beta} \int_T^\infty \frac{R(t)}{t}\, dt = T^\beta \int_0^\infty \frac{k(\frac{x}{T})}{(\frac{x}{T})} \left[a(x) - \frac{c_3}{K(o)}\right] dx .$$

Setzen wir noch

$$k^*(x) = x^{-1-\beta}\, k(x)$$

(2.12)

$$a^*(x) = \begin{cases} o & \text{für } x=o \\ x^\beta \left[a(x) - \frac{c_3}{K(o)}\right] & \text{für } x > o \end{cases} ,$$

so erhalten wir für $\underline{\beta > o}$

$$(2.13) \qquad R^*(t) = \int_o^\infty k^*(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx = O(e^{-m_1 t}) , \quad t \to \infty$$

$o < m_1 < m$, mit $a^*(x) \in \mathcal{T}(1,0)$ [+]) , denn es gilt für $x_o \le x \le x' \le x+\delta$

$$a^*(x') - a^*(x) \ge -H(\delta) - \left|\frac{c_3}{K(o)}\right| (x'^\beta - x^\beta)$$

$$\ge \begin{cases} -H(\delta) - 2\left|\frac{c_3}{K(o)}\right| x_o^\beta & \text{für } -1 < \beta \le o \\ -H(\delta) - \left|\frac{c_3}{K(o)}\right| \delta^\beta & \text{für } o < \beta \le 1 \end{cases}$$

[+]) s. Fußnote S. 48

und $a^*(x) = O(x)$ für $x \to \infty$.

Aus (2.7) ergibt sich für $\underline{\varrho_1 = o}$

$$(2.14) \qquad \tilde{R}(t) = \int_0^\infty \tilde{k}(\tfrac{x}{t})\, \tilde{a}(x)\, dx = O(e^{-m_1 t})$$

für $t \to \infty$ mit

$$\tilde{k}(x) = x^{-\beta} k'(x)$$

$$\tilde{a}(x) = x^{\beta} a(x) \in \mathcal{T}(1,0) \quad {}^{+)}$$

$$\tilde{R}(t) = -t^{1+\beta} R(t) \quad .$$

2) In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß die inverse L^2 - Mellintransformierte zu $\Gamma(w)/K(w-1-\beta)$ eine ganze Funktion höchstens von der Ordnung 1 und, falls genau von der Ordnung 1, höchstens vom Typ e^{-a} ist.

Nach $\mathfrak{K}(1)$ 1) und 2), Lemma 1 und (2.12) gilt

$$(2.15) \qquad k^*(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} K(w)\, x^{-w-1-\beta}\, dw \quad .$$

${}^{+)}$ Für $-1 < \beta < o$ ist $a^*(x)$ bzw. $\tilde{a}(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes i.a. nicht von beschränkter Variation. Wir behalten trotzdem die einfache Schreibweise $\mathcal{T}(1,0)$ bei und werden diese Abänderung später berücksichtigen.

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{1+\beta-i\infty}^{1+\beta+i\infty} K(w-1-\beta)\, x^{-w}\, dw \quad .$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz für Mellintransformierte folgt also

$$(2.16) \qquad K^*(w) = K(w-1-\beta) \quad .$$

Wir setzen

$$(2.17) \qquad F(w) = \frac{\Gamma(w)}{K^*(w)} \quad .$$

Es sei k eine reelle Zahl, die der Bedingung $0 < k < \mathrm{Min}(\alpha, \beta_2)$ genügt. Wir zeigen im folgenden, daß $F(k+iv) \in B(k, \omega, \tau)$ mit $\omega = 1$ und $\tau = e^{-a}$ ist. +)

Wegen $|\Gamma(w)| \cong \sqrt{2\pi} \cdot |v|^{u-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|v|}$ für $|v| \to \infty$ und $\mathfrak{A}(1)\ 3)$ ist

$$(2.18) \qquad |F(w)| = O(|v|^{-\alpha+u-1/2}) \quad \text{für } |v| \to \infty$$

gleichmäßig in $0 \le u \le 1+\beta_2+\beta+\eta$. Aus der obigen Wahl von k , (2.17) , $\mathfrak{A}(1)\ 3)$ und den bekannten Eigenschaften der Γ - Funktion folgt unmittelbar die Gültigkeit von B_1 und B_2 i) , ii) und iii) in der Definition der Klasse $B(k, \omega, \tau)$.

+) Es soll hier und im folgenden nicht untersucht werden, ob ω und τ minimal sind bzw. minimal gemacht werden können. Mit Satz 1 Beweis Teil II erhalten wir in jedem Fall die beiden letzten Abschätzungen von Seite 66.

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel folgt für $u < o$

(2.19) $$F(w) =$$

$$O(|w|^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{r\cos\varphi \log r - (1-a)r\cos\varphi + r(\frac{\pi}{2}|\sin\varphi| - \varphi\sin\varphi)})$$

$$= O(|w|^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{r\cos\varphi \log r - (1-a)r\cos\varphi})$$

$$= O(|w|^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{r\cos\varphi \log(-r\cos\varphi) - (1-a)r\cos\varphi})$$

gleichmäßig in $|\varphi| \leq \pi - \varepsilon$ für $|w| \to \infty$.

Es sei nun $w=(n+\frac{1}{2})e^{i\varphi}$, $\pi-\varepsilon \leq |\varphi| \leq \pi$. Nach [13.2] ist

(2.20) $$\Gamma(w) = \frac{-\pi}{w \sin \pi w \cdot \Gamma(-w)} \quad .$$

Zunächst soll $|\sin \pi w|$ abgeschätzt werden. Wegen $|w+n| \geq \frac{1}{2}$ und der Periodizität genügt es, den Bereich $-\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}$ $u^2 + v^2 \geq \frac{1}{4}$ zu betrachten.

(2.21) $$|\sin \pi w|^2 = \sinh^2 \pi v + \sin^2 \pi u$$

$$\geq \frac{1}{2} \sinh^2 \pi v + \frac{1}{2} \pi^2 \cdot v^2 + 4u^2$$

$$\geq \frac{1}{2} \sinh^2 \pi v + 4(u^2 + v^2)$$

$$\geq \frac{1}{2} \cosh^2 \pi v \quad .$$

Aus (2.20) und (2.21) folgt mit $-w = r\, e^{i(\varphi \mp \pi)}$, $r = n+\frac{1}{2}$, wobei $-\pi$ steht, falls φ positiv ist und umgekehrt,

(2.22)

$$F(w) = O\Big(|w|^{-\alpha} \frac{|w|^{\frac{1}{2}}}{|w|\,|\sin \pi w|} \; e^{-r\cos(\varphi \mp \pi)\log r + r\cos(\varphi \mp \pi)} \cdot e^{r(\varphi \mp \pi)\sin(\varphi \mp \pi) + a\cdot r\cdot\cos\varphi + (\pi/2)\cdot r|\sin\varphi|} \Big)$$

$$= O\Big(|w|^{-\alpha-\frac{1}{2}} \; e^{r\cos\varphi \log r - (1-a)\cdot r\cdot\cos\varphi} \cdot e^{r\left[(\varphi \mp \pi)\sin(\varphi \mp \pi) - \frac{\pi}{2}|\sin\varphi|\right]} \Big)$$

$$= O\Big(e^{r\cos\varphi \log r - (1-a)\cdot r\cdot\cos\varphi} \Big)$$

$$= O\Big(e^{r\cos\varphi \log(-r\cos\varphi) - (1-a)\cdot r\cdot\cos\varphi} \Big) \quad , \quad |w| \to \infty \; .$$

Aus (2.19) und (2.22) folgt die Gültigkeit von B_2 iv) mit [+]) $\omega = 1$ und $\tau = e^{-a}$. Mit

$$x^{k-\frac{1}{2}} f(x) := \operatorname*{l.i.m.}_{T\to\infty} \frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int_{k-iT}^{k+iT} F(w)\, x^{-w}\, dw$$

ist also nach Satz 1 $f(x)$ eine ganze Funktion der Ordnung ≤ 1 und des Typs $\leq e^{-a}$, falls $\omega = 1$ ist, mit

$$x^{k-\frac{1}{2}} f(x) \in L^2(0,\infty) \quad .$$

[+]) s. Fußnote Seite 49.

Schließlich muß das gleiche Ergebnis für den Fall des Kerns $\tilde{k}(x)$ $(\varrho_1 = o)$ hergeleitet werden. Aus (2.3a) und (2.14) f. folgt mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes für die Mellintransformation $\tilde{K}(w)$ von $\tilde{k}(x)$

$$(2.23) \qquad \tilde{K}(w) = -(w-1-\beta)\, K(w-1-\beta) \quad .$$

Wegen $\varrho_1 = o$ hat $K(w)$ eine Polstelle erster Ordnung in $w=o$ nach $\alpha(1)\ 2)$. Also ist $\tilde{K}(w) \neq o$ für $u \leq 1+\varrho_2+\beta+\eta$. Der übrige Beweis verläuft wie oben.

3) In diesem Abschnitt werden wir für $s > o$ die Relation

$$\int_o^\infty \frac{f(st)}{t} \int_o^\infty k^*(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx\, dt = \int_o^\infty e^{-sx}\, a^*(x)\, dx$$

beweisen. Als Hilfsmittel benötigen wir dazu die folgenden Hilfssätze:

Lemma 10

Es sei $h(x)$ eine auf (o, ∞) stetige Funktion mit

i) $h(x) = O(x^{-\varepsilon-\beta})$, $\varepsilon < 1$, $-1 < \beta \leq 1$ für $x \to o$,

ii) $h(x) = c\, x^{-1-\varrho_2-\beta} + O(x^{-1-\varrho_2-\beta-\eta})$, $\varrho_2 > o$, für $x \to \infty$.

Dann konvergiert das Integral $\left[a^*(x) \text{ s. (2.12)} \right]$

$$I(t) = \int_0^\infty h(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx$$

gleichmäßig für alle $0 < T_1 \leq t \leq T_2 < \infty$ und es gilt:

$I(t) = O(t^{1+\beta})$ für $t \to 0$,

$I(t) = O(t^{1+\mu})$ mit $\mu = \mathrm{Min}(1, \gamma+\beta)$ für $t \to \infty$.

Beweis

Nach Voraussetzung existiert eine Zahl x_0 so, daß für $R_2 \geq R_1 \geq T_2 x_0$

$$(2.24) \qquad \left| \int_{R_1}^{R_2} h(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx \right|$$

$$\leq c^* t^{1+\gamma+\beta} \left\{ \left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{a^*(x)}{x^{1+\gamma+\beta}}\, dx \right| + t^\eta \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{x^{1+\eta}} \right\}$$

gilt. Da das mittlere Integral in (2.24) nach (2.8) f. konvergiert, ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz von $I(t)$ für $0 < T_1 \leq t \leq T_2 < \infty$ an der oberen Grenze.

Da $a(x)$ in jedem endlichen Bereich von $[0, \infty)$ von beschränkter Variation ist, folgt mit Voraussetzung i) nach ähnlicher Rechnung die gleichmäßige Konvergenz von $I(t)$ an der unteren Grenze, und somit insgesamt.

Es sei $0 < t < 1$.

$$\int_0^\infty h(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx \;=\; \left\{ \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^\infty \right\} h(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx$$

Nach (2.24) ist das letzte Integral von der Ordnung $t^{1+\varrho+\beta}$. Da in $0 \le x \le x_0$ $|a(x)| \le M$ ist, erhalten wir mit (2.12), die Einschränkung $0 < t < 1$ ist hierbei unwesentlich,

$$(2.25) \qquad \left| \int_0^{x_0} \left| h(\tfrac{x}{t}) \cdot a^*(x) \right| dx \right| \;\le\; M \int_0^{x_0} \left| h(\tfrac{x}{t}) \right| x^\beta\, dx$$

$$\le\; M\, t^{1+\beta} \int_0^\infty |h(x)| \cdot x^\beta\, dx \;=\; O(t^{1+\beta})$$

also insgesamt $I(t) = O(t^{1+\beta})$ für $t \to 0$.

Es sei $t \ge 1$, $\varrho+\beta \le 1$.

$$\int_0^\infty h(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx \;=\; \left\{ \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0 t} + \int_{x_0 t}^\infty \right\} h(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx \quad .$$

Nach Ausintegration des letzten Terms in (2.24) ergibt sich, daß das letzte Integral von der Ordnung $t^{1+\varrho+\beta}$ ist. Mit $|a^*(x)| \le c\, x^{\varrho+\beta}$ für $x \ge x_0$ folgt

$$\left| \int_{x_0}^{x_0 t} h(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx \right| \;\le\; c \int_{x_0}^{x_0 t} \left| h(\tfrac{x}{t}) \right| \cdot x^{\varrho+\beta}\, dx$$

$$\le\; c\, t^{1+\varrho+\beta} \int_0^{x_0} |h(x)| \cdot x^{\varrho+\beta}\, dx \;=\; O(t^{1+\varrho+\beta}) \;,$$

also mit (2.25) insgesamt $I(t) = O(t^{1+\varrho+\beta})$ für $t \to \infty$.

Es sei $t \geq 1$, $\varrho_2+\beta > 1$.

$$\int_0^\infty |h(\tfrac{x}{t})| \cdot |a^*(x)| \, dx = \left\{ \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^\infty \right\} |h(\tfrac{x}{t})| \cdot |a^*(x)| \, dx$$

$$\int_{x_0}^\infty |h(\tfrac{x}{t})| \, |a^*(x)| \, dx \leq C \int_{x_0}^\infty |h(\tfrac{x}{t})| \, x \, dx \leq t^2 C \int_0^\infty |h(x)| \, x \, dx$$

wegen $a^*(x) \in \mathcal{T}(1,0)$, s. (2.13) f . Da das letzte Integral wegen Voraussetzung i) an der unteren Grenze und wegen Voraussetzung ii) an der oberen Grenze existiert, ergibt sich mit (2.25)

$$\int_0^\infty |h(\tfrac{x}{t})| \cdot |a^*(x)| \, dx = O(t^2) \tag{2.26}$$

für $t \to \infty$ und $\varrho_2+\beta > 1$. Zusammen mit dem Ergebnis für $\varrho_2+\beta \leq 1$ erhalten wir die letzte Behauptung unseres Lemmas.

Lemma 11

Es sei $t^{k-\frac{1}{2}} f(t) \in L^2(0,\infty)$,

$f(t)$ beschränkt in $(0,t_0)$,

$$f^{[a]}(t) := t^a \int_t^\infty \frac{f(s)}{s^{a+1}} \, ds \quad , \; \mathrm{Re}\, a > -k, \; k > 0 \; .$$

Dann ist i) $f^{[a]}(t)$ für $t > o$ definiert,

ii) $f^{[a]}(t)$ beschränkt in (o, ∞), falls $\operatorname{Re} a > o$,

iii) $t^{k-\frac{1}{2}} f^{[a]}(t) \in L^2(o, \infty)$,

iv) $F^{[a]}(w) = \frac{F(w)}{w+a}$.

Beweis

Zu i) Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\left| \int_t^\infty \frac{f(s)}{s^{a+1}} \, ds \right| \leq \left\| t^{k-\frac{1}{2}} f(t) \right\|_{L^2} \cdot \frac{[2(k+\operatorname{Re} a)]^{-\frac{1}{2}}}{t^{k+\operatorname{Re} a}}$$

und somit $|f^{[a]}(t)| \leq c\, t^{-k}$. Hieraus folgt i) .

Zu ii) Es sei $t \in (o, t_o)$, $\operatorname{Re} a > o$.

$$|f^{[a]}(t)| \leq t^{\operatorname{Re} a} \int_t^{t_o} \frac{M \, ds}{s^{\operatorname{Re} a + 1}} + t^{\operatorname{Re} a} \frac{c}{t_o^{\operatorname{Re} a + k}}$$

Also ist $f^{[a]}(t)$ in (o, t_o) beschränkt und mit $|f^{[a]}(t)| \leq c\, t^{-k}$ ergibt sich ii) .

Zu iii + iv) Zum Beweis der beiden letzten Eigenschaften gehen wir ähnlich vor wie im Beweis zu Satz 1.

Analog zu B_2 ii) erhalten wir die Eigenschaft

E: Für $o < u < k$ ist $F(w) \in L^2(u-i\infty, u+i\infty)$ und es gilt $\lim_{u \to k-o} F(u+iv) = F(k+iv)$.

Da

$$\int_o^\infty \frac{|f(s)|}{s^{\mathrm{Re}\ a+1}} \int_o^s t^{\mathrm{Re}\ a+u-1}\, dt\, ds = \frac{1}{\mathrm{Re}\ a+u} \int_o^\infty |f(s)|\, s^{u-1}\, ds$$

für $k > u > \mathrm{Max}(o, -\mathrm{Re}\ a)$ existiert [an der unteren Grenze wegen $|f(t)| \leq M$ und $u > o$, an der oberen Grenze wegen $t^{k-\frac{1}{2}} \cdot f(t)$, $t^{-k+u-\frac{1}{2}} \in L^2(o, \infty)$], folgt mit dem Satz von Fubini

$$(2.27) \qquad \mathfrak{F}^{[a]}(w) = \int_o^\infty f^{[a]}(t)\, t^{w-1}\, dt$$

$$= \int_o^\infty t^a \left\{ \int_t^\infty \frac{f(s)}{s^{a+1}}\, ds \right\} t^{w-1}\, dt$$

$$= \int_o^\infty \frac{f(s)}{s^{a+1}} \left\{ \int_o^s t^{a+w-1}\, dt \right\} ds$$

$$= \frac{F(w)}{w+a}$$

für $k > u > \mathrm{Max}(o, -\mathrm{Re}\ a)$. Wir erhalten also wegen Eigenschaft E und (2.27):

$E^{[a]}$: Für $k > u > \mathrm{Max}(o, -\mathrm{Re}\ a)$ ist $F^{[a]}(w)$ aus $L^2(u-i\infty, u+i\infty)$ und es gilt

$$\underset{u \to k-o}{\text{l.i.m.}} \; F^{[a]}(u+iv) = F^{[a]}(k+iv) := \frac{F(k+iv)}{k+iv+a} \quad .$$

Hieraus folgt analog zum Beweis Satz 1 Teil II γ

$x^{k-\frac{1}{2}} f^{[a]}(x) \in L^2(o, \infty)$ und

$$x^{k-\frac{1}{2}} f^{[a]}(x) = \underset{T \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int_{k-iT}^{k+iT} F^{[a]}(w)\, x^{-w}\, dw \quad .$$

Lemma 12

Es sei $h(x) \in C^1(o, \infty)$,

$h(x) = O(x^{-\varepsilon-\beta})$, $\varepsilon < 1$, für $x \to o$,

$h(x) \cong r_o \cdot x^{-\varrho-\beta-1}$, $\varrho > o$, für $x \to \infty$.

Dann gilt für die Mellintransformation $H_{[a]}(w)$ von

$$h_{[a]}(x) := -x^{a+1} \left[\frac{h(x)}{x^a} \right]'$$

in $\beta+\varepsilon < u < 1+\varrho+\beta$ $H_{[a]}(w) = (w+a)\, H(w)$.

Beweis

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_r^R h_{[a]}(x)\, x^{w-1}\, dx = -h(x)\, x^w \Big|_r^R + (w+a) \int_r^R h(x)\, x^{w-1}\, dx \quad .$$

Nach Grenzübergang $r \to o$, $R \to \infty$ folgt hieraus bei Beachten der asymptotischen Beziehungen für $h(x)$ die Behauptung.

Wir wenden uns nun dem Beweis der zu Anfang dieses Abschnitts aufgestellten Relation zu. Mit $o < T_1 \leq T_2 < \infty$, $s > o$ beliebig erhalten wir nach partieller Integration

$$(2.28) \qquad \int_{T_1}^{T_2} \frac{f(st)}{t} \int_o^\infty k^*(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx\, dt =$$

$$-f^{[1]}(st) \int_o^\infty k^*(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx \Big|_{T_1}^{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{f^{[1]}(St)}{t} \int_o^\infty k^*_{[1]}(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx\, dt ,$$

wobei $f^{[1]}(t)$ und $k^*_{[1]}(x)$ die Bezeichnungen aus den Lemmata 11 und 12 sind. Die partielle Integration ist zunächst nur formal durchgeführt, die Differentiation unter dem uneigentlichen Integral bleibt zu rechtfertigen.

Da aber $k^*_{[1]}(x)$ nach den Lemmata 12 und 6 die Voraussetzungen von Lemma 10 erfüllt, konvergiert

$$\int_o^\infty k^*_{[1]}(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx$$

gleichmäßig in $T_1 \leq t \leq T_2$, also ist in (2.28) die Differentiation mit der Integration vertauschbar.

Führen wir die Grenzübergänge $T_1 \to o$ und $T_2 \to \infty$ durch, so existiert das Integral auf der linken Seite der Gleichung (2.28) an der unteren Grenze wegen Lemma 10 und an

der oberen Grenze, da dort $t^{k-\frac{1}{2}} f(t)$ und $t^{-k-\frac{1}{2}} R^*(t)$ nach (2.13) quadratintegrabel sind.

Nach Lemma 11 ist $|f^{[1]}(t)| \leq M$ in (o, ∞), und so verschwinden beim Grenzübergang $T_1 \to o$, $T_2 \to \infty$ die ausintegrierten Anteile in (2.28) an der unteren Grenze wegen Lemma 10 und an der oberen Grenze wegen (2.13). D.h.

$$(2.29) \qquad \int_o^\infty \frac{f(st)}{t} \int_o^\infty k^*(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx\, dt$$

$$= \int_o^\infty \frac{f^{[1]}(st)}{t} \int_o^\infty k^*_{[1]}(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx\, dt \quad .$$

Durch nochmalige partielle Integration erhalten wir

$$(2.30) \qquad \int_{T_1}^{T_2} \frac{f^{[1]}(st)}{t} \int_o^\infty k^*_{[1]}(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx\, dt$$

$$= -f^{[1][1]}(st) \int_o^\infty k^*_{[1]}(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx \Big|_{T_1}^{T_2}$$

$$+ \int_{T_1}^{T_2} \frac{f^{[1][1]}(st)}{t} \int_o^\infty k^*_{[1][1]}(\tfrac{x}{t})\, a^*(x)\, dx\, dt \quad .$$

Nach (2.18) erhalten wir für die Mellintransformierte $F^{[1][1]}(w) = (w+1)^{-2} F(w)$ von $f^{[1][1]}(t)$ die Abschätzung

$$(2.31) \qquad |F^{[1][1]}(w)| \leq C\,|v|^{-\frac{5}{2} - \alpha + u}$$

gleichmäßig in $o \le u \le 1+\varrho_2+\beta+\eta$ für $|v| \to \infty$.

Wir zeigen zunächst, daß aus (2.31) für $f^{[1][1]}(t)$ eine Abschätzung der Gestalt

$$(2.32) \qquad f^{[1][1]}(t) = O(t^{-1-\mu-\eta_1})$$

für $t \to \infty$ mit $\mu = \mathrm{Min}(\varrho_2+\beta, 1)$ und $o < \eta_1 < \mathrm{Min}(\eta, \alpha)$ folgt.

Nach Lemma 4 und dem Cauchyschen Integralsatz ergibt sich mit (2.31) für $\mu \ge o$ [+])

$$f^{[1][1]}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} F^{[1][1]}(w)\, t^{-w}\, dw$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \left\{ \int_{1-i\infty}^{1-iT} + \int_{1-iT}^{1+\mu+\eta_1-iT} + \int_{1+\mu+\eta_1-iT}^{1+\mu+\eta_1+iT} + \int_{1+\mu+\eta_1+iT}^{1+iT} + \int_{1+iT}^{1+i\infty} \right\} F^{[1][1]}(w)\, t^{-w}\, dw$$

$$= \frac{t^{-1-\mu-\eta_1}}{2\pi} \int_{-T}^{+T} F^{[1][1]}(1+\mu+\eta_1+iv)\, e^{-iv\log t}\, dv$$

$$+ O\left(t^{-1} \int_T^\infty |v|^{-\frac{3}{2}-\alpha}\, dv\right) + O\left(\int_1^{1+\mu+\eta_1} \frac{t^{-u}}{T^{\alpha-u+5/2}}\, du \right) .$$

[+]) Im Fall $\mu \le o$ ergibt sich (2.32) aus Lemma 6.

Da $F^{[1]\,[1]}(1+\mu+\eta_1+iv) \in L^2(-\infty,\infty)$ und gleichmäßig beschränkt ist, gilt [15.7]

$$\int_{-T}^{+T} F^{[1]\,[1]}(1+\mu+\eta_1+iv)\, e^{-iv\log t}\, dv = O(\log T)$$

gleichmäßig in t für $T \to \infty$ und somit

$$\begin{aligned} f^{[1]\,[1]}(t) &= O(t^{-1-\mu-\eta_1}\log T) + O(t^{-1}\, T^{-\frac{1}{2}-\alpha}) \\ &\quad + O(t^{-1}\, T^{-\frac{3}{2}-\alpha+\mu+\eta_1}) \\ &= O(t^{-1-\mu-\eta_1}\log T) + O(t^{-1}\, T^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

(letzteres nach Definition von μ und η_1) für $T \to \infty$ gleichmäßig für $t \geq 1$. Setzen wir $T^{1/2} = t^{\mu+\eta_1}$, so ergibt sich (2.32), wenn wir z.B. η_1 durch $\eta_1/2$ ersetzen.

Nach Lemma 11 ist $\left| f^{[1]\,[1]}(t) \right| \leq M$ in $(0,\infty)$, und so verschwinden beim Grenzübergang $T_1 \to 0$, $T_2 \to \infty$ die ausintegrierten Anteile in (2.30) wegen (2.32) und wegen Lemma 10. Wir erhalten also:

$$(2.33) \qquad \int_0^\infty \frac{f(st)}{t} \int_0^\infty k^*\left(\frac{x}{t}\right) a^*(x)\, dx\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{f^{[1]\,[1]}(st)}{t} \int_0^\infty k^*_{[1]\,[1]}\left(\frac{x}{t}\right) a^*(x)\, dx\, dt \quad .$$

Es sei $\varrho_2 + \beta \leq 1$

Wegen (2.32) ist für $x > 0$

$$\int_x^\infty \left| f^{[1][1]}(t) \right|^2 t^{2k_0 - 1}\, dt < C \int_x^\infty t^{2k_0 - 1 - 2(1+\mu+\eta_1)}\, dt < \infty$$

für $k_0 = 1 + \mu + \eta/2$. Wegen

$$-1 - \varrho_2 - \beta > -1 - \mu - \eta_1/2 = -1 - \varrho_2 - \beta - \eta/2$$

existiert nach Lemma 11 $f^{[1][1][-1-\varrho_2-\beta]}(t)$. Analog dem oben Bewiesenen erhalten wir

$$(2.34) \qquad \int_0^\infty \frac{f(st)}{t} \int_0^\infty k^*\left(\frac{x}{t}\right) a^*(x)\, dx\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{f^{[1][1][-1-\varrho_2-\beta]}(st)}{t} \int_0^\infty k^*_{[1][1][-1-\varrho_2-\beta]}\left(\frac{x}{t}\right) a^*(x)\, dx\, dt .$$

Für die Mellintransformationen der beiden, neu eingeführten Funktionen ergibt sich nach Lemma 12 und (2.16)

$$(2.35) \qquad K^*_{[1][1][-1-\varrho_2-\beta]}(w) = (w+1)^2\, (w-1-\varrho_2-\beta)\, K(w-1-\beta)$$

bzw. nach Lemma 11 und (2.17)

$$(2.36) \qquad F^{[1][1][-1-\varrho_2-\beta]}(w) = \frac{\Gamma(w)}{(w+1)^2\, (w-1-\varrho_2-\beta)\, K(w-1-\beta)} .$$

Diese Mellintransformationen sind nach Definition der Klasse $\tilde{\mathfrak{A}}(1)$ 2) auch in $w = 1+\varrho_2+\beta$ holomorph. Mit (2.36) und Lemma 6 erhalten wir

$$(2.37)\qquad \left| f^{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}(t) \right| = \begin{cases} O(t^{-1-\mu-\eta_1}) & \text{für } t \to \infty \\ O(1) & \text{für } t \to 0 \end{cases}$$

und mit (2.35) und Lemma 6

$$(2.38)\qquad k^{*}_{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}(x) = O(x^{-1-\varrho_2-\beta-\eta}) \quad \text{für } x \to \infty .$$

Wegen (2.38), (2.6) und (2.12) gilt

$$(2.39)\qquad \int_{x_o}^{\infty} \left| k^{*}_{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}\left(\tfrac{x}{t}\right)\right| \cdot |a^{*}(x)|\, dx$$

$$\leq c\, t^{\varrho_2+\beta+1} \int_{0}^{\infty} \left| k^{*}_{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}(x)\right| x^{\varrho_2+\beta}\, dx = C\, t^{1+\varrho_2+\beta}.$$

Wegen (2.25) , (2.37) und (2.39) gilt weiterhin, daß

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\left| f^{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}(st)\right|}{t} \int_{0}^{\infty} \left| k^{*}_{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}\left(\tfrac{x}{t}\right)\right| \cdot |a^{*}(x)|\, dx\, dt$$

konvergiert. Nach dem Satz von Fubini können wir deshalb in (2.34) die Integrationen auf der rechten Seite vertauschen.

Wegen $\quad t^{1+\beta-\frac{1}{2}}\, f^{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}(t) \in L^2(0,\infty)$

und $$x^{1+\beta-\frac{1}{2}} \, k^{*}_{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}(x) \in L^2(0,\infty)$$

folgt nach Lemma 5 mit (2.35) und (2.36)

$$(2.40) \qquad \int_0^\infty \frac{f^{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}(st)}{t} \, k^{*}_{[1]\,[1]\,[-1-\varrho_2-\beta]}\left(\frac{x}{t}\right) dt = e^{-sx} .$$

Wir erhalten schließlich aus (2.34) nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge auf der rechten Seite mit (2.40):

$$(2.41) \qquad \int_0^\infty \frac{f(st)}{t} \int_0^\infty k^{*}\left(\frac{x}{t}\right) a^{*}(x) \, dx \, dt = \int_0^\infty e^{-sx} \, a^{*}(x) \, dx .$$

Es sei $\varrho_2+\beta > 1$

Unter Berücksichtigung von (2.26) und (2.32) ergibt sich die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{|f^{[1]\,[1]}(st)|}{t} \int_0^\infty \left|k^{*}_{[1]\,[1]}\left(\frac{x}{t}\right)\right| \cdot |a^{*}(x)| \, dx \, dt .$$

Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge auf der rechten Seite der Gleichung (2.33) ergibt sich wegen

$$x^{1+\beta-\frac{1}{2}} \, k^{*}_{[1]\,[1]}(x) \in L^2(0,\infty)$$

und $$t^{1+\beta-\frac{1}{2}} \, f^{[1]\,[1]}(t) \in L^2(0,\infty)$$

wie oben die Beziehung (2.41) .

Unter Beachten von (2.23) und $\mathfrak{K}(1)$ 3) erhält man analog

$$(2.42) \qquad \int_0^\infty \frac{f(st)}{t} \int_0^\infty \tilde{k}\left(\frac{x}{t}\right) \tilde{a}(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-sx}\, \tilde{a}(x)\, dx \quad .$$

4) Mit Hilfe der Relationen (2.41) und (2.42) soll in diesem letzten Teil des Beweises die Behauptung des Satzes aus dem Taubersatz von Ingham hergeleitet werden.

Aus (2.41) und (2.13) folgt für $s > o$

$$(2.43) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\, a^*(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{f(st)}{t}\, R^*(t)\, dt \quad .$$

Damit ergibt sich durch partielle Integration unter Berücksichtigung von (2.12) und (2.6)

$$(2.44) \qquad \varphi(s) := \int_0^\infty e^{-sx}\, da^*(x) = \int_0^\infty s\, e^{-sx}\, a^*(x)\, dx$$

$$(2.45) \qquad = s \int_0^\infty \frac{f(st)}{t}\, R^*(t)\, dt \quad .$$

Aus (2.44) folgt, daß $\varphi(s)$ holomorph für $\mathrm{Re}\, s > o$ ist. Da $f(st)$ bei festem $t \geq o$ eine ganze Funktion mit

$$|f(st)| \leq C(\varepsilon)\, e^{(\tau + \varepsilon)\,|s|\cdot|t|}$$

$$|f'(st)| \leq C(\varepsilon)\, e^{(\tau + \varepsilon)\,|s|\cdot|t|}$$

(s. Teil 2 dieses Beweises bzw. Lemma 9) ist, kann $\Psi(s)$ wegen $|R^*(t)| \leq C\, e^{-m_1 \cdot t}$ und (2.45) in die Kreisscheibe $|s| \leq \frac{m_1}{2\tau}$ analytisch fortgesetzt werden, d.h.

$$\frac{\Psi(s) - \Psi(o)}{s} = \int_0^\infty \frac{f(st)}{t} R^*(t)\, dt$$

ist stetig in $|s| \leq \frac{m_1}{2\tau}$. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Ingham (Satz 2) erfüllt +), und wir erhalten

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} |a^*(x)| \leq M\, H(\tfrac{2\tau}{m_1})$$

und mit (2.12) die Behauptung unseres Satzes. Aus (2.42) und (2.14) folgt analog die Behauptung im Fall $\beta_1 = o$. Damit ist für $\gamma = 1$ Satz 3 bewiesen.

II) $\gamma > o$

Wir setzen

$$\begin{aligned} &\tilde{t} = t^\gamma ; \quad \tilde{x} = x^\gamma ; \\ &\tilde{a}(\tilde{x}) = a(x) ; \quad \tilde{k}(\tilde{x}) = k(x) ; \\ &\tilde{R}(\tilde{t}) = R(t) ; \quad \tilde{K}(w) = \gamma K(\gamma w) ; \\ &\tilde{\beta}_i = \frac{\beta_i}{\gamma} ; \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\gamma} ; \quad \tilde{\alpha} = \gamma a ; \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} . \end{aligned} \tag{2.46}$$

+) Für $-1 < \beta < o$ ist $a^*(x)$ in der Umgebung von $x=o$ i.a. nicht von beschränkter Variation (s. Fußnote S.48). Dies beeinträchtigt aber nicht die Gültigkeit der Argumentation. Vgl. [18] und [10] .

Zunächst erhalten wir unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{T}(\gamma,\beta)$, daß $\tilde{a}(\tilde{x}) \in \mathcal{T}(1,\tilde{\beta})$ ist. Wir zeigen im folgenden, daß $\tilde{k}(\tilde{x}) \in \tilde{\mathcal{R}}(1)$ ist.

1) $$\int_0^\infty x^{\varrho_2-1} |k(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \tilde{x}^{\frac{\varrho_2-1}{\gamma}} |\tilde{k}(\tilde{x})|^2 \, \tilde{x}^{\frac{1}{\gamma}-1} \, d\tilde{x}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \tilde{x}^{\tilde{\varrho}_2-1} |\tilde{k}(\tilde{x})|^2 \, d\tilde{x} \, .$$

2) ist bei Beachten von (2.46) erfüllt.

3) $$\frac{1}{\tilde{K}(w)} = \frac{1}{\gamma K(\gamma w)}$$

$$= O\left[e^{\gamma a u + \frac{\pi}{2}|v|} \cdot \begin{cases} |w|^{-\alpha} & \text{für } \tilde{\varrho}_1 > 0 \\ |w|^{-\alpha+1} & \text{für } \tilde{\varrho}_1 = 0 \end{cases} \right]$$

mit $\alpha > 0$ für $|w| \to \infty$.

Also ist $\tilde{k}(\tilde{x}) \in \tilde{\mathcal{R}}(1)$. Die Voraussetzung des Satzes lautet unter Beachtung von (2.46)

$$\int_0^\infty \tilde{k}\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}}\right) d\tilde{a}(\tilde{x}) = \tilde{R}(\tilde{t}) = O(e^{-m\tilde{t}})$$

für $\tilde{t} \to \infty$, d.h. es gilt nach I für $x \to \infty$:

$$a(x) = \tilde{a}(\tilde{x}) = O(\tilde{x}^{-\tilde{\beta}}) = O(x^{-\beta})$$

§ 4 ANWENDUNGEN AUF SPEZIELLE KERNE

Unter Berücksichtigung von Kapitel II §1 Beispiel B und Satz 3 erhalten wir unmittelbar den folgenden Taubersatz:

Satz 4 (Vučković)

1) Die Funktion $a(x)$ sei definiert und reell für $x \geq 0$ und von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall, $a(0) = 0$.

2) Es gebe eine Funktion $H(\delta)$ und Zahlen $\gamma > 0$ und β, $-\gamma < \beta \leq \gamma$, so, daß für alle $\delta > 0$ und $x \leq x' \leq x+\delta$

$$x'^{\frac{\beta}{\gamma}} a(x'^{\frac{1}{\gamma}}) - x^{\frac{\beta}{\gamma}} a(x^{\frac{1}{\gamma}}) \geq -H(\delta)$$ ist.

3) Es sei $a(x) = O(x^{\gamma-\beta})$ für $x \to \infty$.

Dann folgt aus

$$\int_0^\infty \frac{da(x)}{(x+t)^{\varrho-1}} = O(e^{-mt^\gamma})$$

$m > 0$, $\varrho > 1$, für $t \to \infty$

$$a(x) = O(x^{-\beta}) \qquad \text{für } x \to \infty.$$

Vergleichen wir Satz 4 mit dem Ergebnis von Vučković [18], so stellen wir die folgenden Unterschiede fest:

i) In [18] fehlt die a-priori-Abschätzung 3. Die Hinzunahme dieser Voraussetzung bedeutet aber, wie bereits in II §2 bemerkt, keine Einschränkung für die Anwendungen, da das Hauptglied von der Ordnung $x^{\gamma-\beta}$ ist. Unter Ausnutzung besonderer Eigenschaften spezieller Kerne, z.B. $k(x) \neq o$ etc. , kann diese a-priori-Abschätzung vielfach aus den anderen Voraussetzungen hergeleitet werden.

ii) Vučković verwendet statt der Tauberbedingung 2) die folgende

2*) Es gebe Zahlen $\gamma > o$ und β , $-\gamma < \beta$, so, daß für alle $x \leq x' \leq x+x^{1-\gamma}$

$x^{\beta}\,[a(x') - a(x)] > -m$ ist.

Vučković selbst hat jedoch bewiesen [18] , daß aus 2*) und 3) die Bedingung 2 abgeleitet werden kann. Deshalb bleibt Satz 4 gültig, wenn 2) durch 2*) ersetzt wird.

iii) In [18] fehlt die Einschränkung $\beta \leq \gamma$. Die Aufnahme dieser Einschränkung in die Voraussetzungen ist wegen der Verallgemeinerung des Satzes auf die Klasse $\mathfrak{K}(\gamma)$ verständlich. Eine ähnliche Erscheinung ist bei [18] gegenüber [17] zu beobachten, wo Satz 4 speziell für $\varsigma = 2$, $\gamma = 1/4$, $\beta = -1/4$ bewiesen wird.

Im übrigen sei darauf hingewiesen, daß Satz 4 für $\varsigma = 2$ $\gamma = 1/2$, $\beta = +1/2$ als erstes Ergebnis in dieser Richtung 1952 von Avakumović [1] mit den Änderungen i) und ii) bewiesen wurde.

Unter Berücksichtigung von II §1 Beispiel A erhalten wir mit $H(\delta) = -K_1\delta - K_2$, $\gamma = 1/2$, $\beta = o$ aus Satz 3 den folgenden Taubersatz:

Satz 5 (Niemeyer)

1) Die Funktion $a(x)$ sei definiert und reell für $x \geq o$ und von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall, $a(o) = o$.

2) Es gebe Konstanten $K_1 \geq o$ und $K_2 \geq o$ so, daß für alle $x_1 \geq x_2 \geq x_o$

$$a(x_1) - a(x_2) \geq -K_1 (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) - K_2$$ ist.

3) Es sei $a(x) = O(x^{\frac{1}{2}})$ für $x \to \infty$.

Dann folgt für jedes feste, ganzzahlige $n \geq o$ aus

$$\int_o^\infty \frac{x^{n+1}\, da(x)}{(x+t)^{n+2}} = O(e^{-m \cdot t^{\frac{1}{2}}})$$

$m > o$, für $t \to \infty$

$$a(x) = O(1) \quad \text{für } x \to \infty .$$

Im Unterschied zu dem Ergebnis von Niemeyer [14] ist in Satz 5 nur die a-priori-Abschätzung 3 hinzugekommen.

Anhand der folgenden Beispiele wollen wir schließlich die Genauigkeit der Abschätzungen in unseren Sätzen untersu-

chen und zeigen, daß der allgemeine Taubersatz in II §3 bestmöglich ist im folgenden Sinn:

Lemma 13

Zu jedem $\gamma > 0$ und jedem β mit $-\gamma < \beta \leq \gamma$ gibt es mindestens einen Kern $k(x) \in \mathfrak{A}(\gamma)$ und eine Funktion $a(x) \in \mathcal{T}(\gamma,\beta)$ so, daß

i) $\int_0^\infty k(\frac{x}{t})\, da(x) = O(e^{-m\cdot t^\gamma})$, $m > 0$, für $t \to \infty$ gilt;

ii) die Abschätzung $a(x) = D + O(x^{-\beta})$ für $x \to \infty$ nicht verbessert, d.h. das O-Zeichen nicht durch ein o-Zeichen ersetzt werden kann.

Beweis

Wir beweisen Lemma 13 für $\gamma = 1$. Die Behauptung für ein beliebiges $\gamma > 0$ kann man hieraus mit Hilfe einer Substitution wie im Beweis zu Satz 3 herleiten.

1) Wir setzen $k(x) = \frac{+\, x^{1+\beta}}{(1+x^2)^2}$ und beweisen im folgenden zuerst, daß $k(x) \in \mathfrak{A}(1)$ ist.

Wir setzen $\varrho_1 = \beta+1$, $\varrho_2 = 3-\beta$, $\eta = 1$.

Zu $\mathfrak{A}(1)$ 1)
$k(x)$ ist für $x \geq 0$ stetig und $x^{\frac{\varrho_2-1}{2}}\, k(x) \in L^2(0,\infty)$.

Nach [15.6] lautet die Mellintransformation von $k(x)$

$$K(w) = \frac{\Gamma(1-\frac{w+\beta+1}{2})}{2 \sin \pi \frac{w+\beta+1}{2}} \quad .$$

Zu $\mathfrak{A}(1)$ 2)

$K(w)$ ist in $-1 - (\beta+1) \leq u \leq (3-\beta) + 1$ meromorph mit genau zwei einfachen Polstellen in $-\varrho_1 = -(\beta+1)$ und $\varrho_2 = (3-\beta)$. Es gilt dort gleichmäßig

$$K(w) = O(|w|\, e^{-\frac{\pi}{2}|v|}) \qquad \text{für } |v| \to \infty \ .$$

Zu $\mathfrak{A}(1)$ 3)

$[K(w)]^{-1}$ ist in der ganzen Ebene holomorph, und es gilt dort gleichmäßig in $\arg w$

$$[K(w)]^{-1} = O(|w|^{-1}\, e^{\frac{\pi}{2}|v|}) \qquad \text{für } |w| \to \infty \ .$$

2) Wir setzen

$$a(x) = \int_0^x \frac{\sin v}{v^\beta}\, dv$$

$-1 < \beta \leq 1$, und beweisen im folgenden, daß $a(x)$ aus $\mathfrak{T}(1,\beta)$ ist.

Zu $\mathfrak{T}(1,\beta)$ 1)

Es ist $a(o) = o$, $a(x)$ für $x \geq o$ reell und in jedem end-

lichen Intervall der x-Achse stetig differenzierbar, also auch von beschränkter Variation.

Zu $\mathfrak{T}(1,\beta)$ 3)

Für $\beta=1$ ist $a(x) = O(1)$ für $x \to \infty$, da das entsprechende uneigentliche Integral existiert. Für $-1 < \beta < 1$ gilt

$$|a(x)| \leq \int_0^x v^{-\beta}\, dv = \frac{1}{1-\beta}\, x^{1-\beta} .$$

Zu $\mathfrak{T}(1,\beta)$ 2)

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$x'^{\beta}\, a(x') - x^{\beta}\, a(x) = \left[\xi^{\beta}\, \frac{\sin \xi}{\xi^{\beta}} + \beta\, \xi^{\beta-1}\, a(\xi) \right] (x'-x)$$

$$\geq -C \cdot \delta$$

für $x \leq x' \leq x+\delta$ wegen der bereits bewiesenen Eigenschaft 3) .

3) Mit Hilfe komplexer Integration beweist man

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+t^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{4t}\, e^{-t} .$$

Aus dieser Formel erhält man

$$\int_0^{\infty} k\left(\frac{x}{t}\right)\, d\, a(x) = \frac{\pi}{4}\, t^{2-\beta}\, e^{-t}$$

und somit Behauptung i) von Lemma 13.

4) Wir beweisen schließlich

$$a(x) = D - \frac{\cos x}{x^{\beta}} + O(x^{-\beta-1})$$

für $x \to \infty$ mit

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v^{\beta}}\, dv - \beta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos v}{v^{\beta+1}}\, dv \quad .$$

Dies ist zugleich die Behauptung ii) von Lemma 13 .

Mit Hilfe partieller Integration erhalten wir nämlich

$$a(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v^{\beta}}\, dv - \frac{\cos x}{x^{\beta}} - \beta \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos v}{v^{\beta+1}}\, dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v^{\beta}}\, dv - \frac{\cos x}{x^{\beta}} - \beta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos v}{v^{\beta+1}}\, dv - \beta \frac{\sin x}{x^{\beta+1}}$$

$$+ \beta(\beta+1) \int_x^{\infty} \frac{\sin v}{v^{\beta+2}}\, dv$$

$$= D - \frac{\cos x}{x^{\beta}} + O(x^{-\beta-1}) \quad .$$

Schließlich diskutieren wir noch das folgende Beispiel:

Beispiel

Es sei $k(x) = (1+x^2)^{-1}$

$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x - [x] - \frac{1}{2} & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

Dann ist i) $k(x) \in \mathfrak{K}(1)$,

ii) $a(x) \in \mathfrak{V}(1,0)$,

iii) $$\int_0^\infty k(\tfrac{x}{t})\, da(x) = -\pi t \, \frac{e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}} .$$

Beweis

Zu i) Nach [15.6] lautet die Mellintransformation von $k(x)$

$$K(w) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \frac{w}{2}} .$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung mit $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2$, $\eta = 1$, $a = 0$ und $\alpha = 1$.

Zu ii) Für diesen Fall der Sägezahnkurve ist $a(x) \in \mathfrak{V}(1,0)$ sofort einzusehen.

Zu iii)

$$\int_0^\infty \frac{da(x)}{x^2+t^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+t^2} - \frac{1}{2t^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{\pi \cot \pi i t - \frac{1}{it}}{2it}$$

$$= -\frac{\pi}{t} \frac{e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}$$

Hieraus ergibt sich sogleich die dritte Behauptung.

Dieses Beispiel kann wie Lemma 13 als Hinweis dafür betrachtet werden, daß der allgemeine Taubersatz bestmöglich ist, da $a(x) = O(1)$ aber nicht $a(x) = o(1)$ für $x \to \infty$ gilt.

Es beweist aber auch, daß eine Verschärfung der Tauber-sätze im allgemeinen keine Verschärfung der Tauberbedingungen zur Folge hat, sondern nur ein Aufsuchen neuer, passender Tauberbedingungen. Es gilt nämlich für jedes natürliche n

$$a(n + \frac{1}{2n}) - a(n - \frac{1}{2n}) = \frac{1}{n} - 1$$

und damit

$$\lim_{h \downarrow 1,\ x \to \infty,\ x \le y \le hx} (a(y) - a(x)) \le -1 .$$

Somit erfüllt $a(x)$ nicht die Wienersche Tauberbedingung und wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left[a(n+\tfrac{1}{2n}) + C \log(n+\tfrac{1}{2n}) - a(n-\tfrac{1}{2n}) - C \log(n-\tfrac{1}{2n}) \right] = -1$$

für jede Konstante C auch nicht die Tauberbedingung von Ganelius. ($-a(x)$ würde zwar noch diesen Bedingungen genügen, aber für $b(x) = a(x) - a(\pi x)$ würde auch dieses Argument hinfällig.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] AVAKUMOVIĆ, V. G.
Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman
Math. Zeitschr. 53 (1950) , Heft 1 , S. 53 - 58

[2] AVAKUMOVIĆ, V. G.
Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung
Publ. Math. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 4 (1952)
S. 95 - 96

[3] BEURLING, A.
Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes
et leur application à une transformation fonctionelle
C. R. du 9ième congrès des math. scand.
Helsingfors 1938

[4] BOAS, R. P.
Entire Functions
New York 1954
[4.1] S. 11 f
[4.2] S. 13
[4.3] S. 5
[4.4] S.103

[5] DOETSCH, G.
Handbuch der Laplace - Transformation I
Basel 1950

[6] FRENNEMO, L.
On general Tauberian remainder theorems
Math. Scand. 17 (1965) , S. 77 - 88

[7] GANELIUS, T.
The remainder in Wiener's Tauberian theorem
Göteborg 1962

[8] GRIFFITH, J. L.

On Mellin transforms of functions analytic in the neighbourhood of the origin
J. Proc. Roy. Soc. New South Wales 96 (1963)
S. 153 - 160

[9] INGHAM, A. E.

On Wiener's method in Tauberian theorems
Proc. London Math. Soc. 38 (1935) , S. 458 - 480

[10] KARAMATA, J.

Über einen Satz von H. Heilbronn und E. Landau
Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade 5 (1936)
S. 28 - 38

[11] LYTTKENS, S.

The remainder in Tauberian theorems I
Ark. mat. 2 (1954) , S. 575 - 588

[12] LYTTKENS, S.

The remainder in Tauberian theorems II
Ark. mat. 3 (1956) , S. 315 - 349

[13] MAGNUS - OBERHETTINGER - SONI

Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics
Berlin 1966

[13.1] S. 13

[13.2] S. 2

[14] NIEMEYER, H.

Über die elastischen Eigenschwingungen endlicher Körper
Arch. Rat. Mech. Analysis 19 (1965) , S. 24 - 61

[15] TITCHMARSH, E. C.
Introduction to the theory of Fourier integrals
Oxford 1948
[15.1] S. 94
[15.2] S. 84
[15.3] S. 95
[15.4] S. 46
[15.5] S. 90
[15.6] S.192
[15.7] S. 85 analog Beweis Satz 6.1

[16] TITCHMARSH, E. C.
The theory of functions
Oxford 1939
[16.1] S.379

[17] VUĆKOVIĆ, V. und BOJANIĆ, R.
Über die Eigenfunktionen der schwingenden Platte
Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences,
Inst. Math. 3 (1953) , S. 107 - 128

[18] VUĆKOVIĆ, V.
Quelques théorèmes relatifs à la transformation
de Stieltjes
Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences,
Inst. Math. 6 (1954) , S. 63 - 74

[19] WIDDER, D. V.
The Laplace transform
Princeton 1946

[20] WIENER, N.
Tauberian theorems
Annals of Mathematics 33 (1932) , S. 1 - 100

SYMBOLVERZEICHNIS

$A(k, \omega, \tau)$	S. 17
A_1	S. 17
A_2	S. 17
$B(k, \omega, \tau)$	S. 17
B_1	S. 17
B_2	S. 17
$\mathfrak{K}(\gamma)$	S. 36
$\mathcal{T}(\gamma, \beta)$	S. 41

Lebenslauf

Am 13. April 1940 wurde ich, Manfred Stöckmann, als Sohn des Zahntechnikers Hermann Stöckmann und seiner Ehefrau Helene, geb. Gersenich, in Aachen geboren. Nach kriegsbedingten Wirren wurde ich 1947 in Gronau / Westfalen eingeschult. Von 1951 bis 1960 besuchte ich in Aachen das mathematisch - naturwissenschaftliche Couvengymnasium, wo ich auch am 9. 3. 1960 meine Reifeprüfung ablegte.

Vom Sommersemester 1960 ab studierte ich an der T.H. Aachen Mathematik, Physik und Geographie. Am 14. 5. 1964 bestand ich die allgemeine Prüfung in Philosophie und Pädagogik und nach einem Studium von elf Semestern am 4. 3. 1966 die erste philologische Staatsprüfung in Mathematik und Physik.

Vom 1. 4. 1966 bis zum 30. 9. 1967 war ich wissenschaftlicher Assistent von Herrn Professor Dr. Claus Müller am Institut für Reine und Angewandte Mathematik der T.H. Aachen. Seit dem 1. 10. 1967 bin ich am Lehrstuhl für Instrumentelle und Angewandte Mathematik der Philipps - Universität Marburg wissenschaftlicher Assistent (m.d.V.b.) bei Herrn Professor Dr. Niemeyer.

Druck: R. M. Krupinski : Mondorf/Rh. : Tel. Bonn 42713